

10. Mellékletek

1. melléklet:

Dolgozat A változat

A csoport

Név:

Osztály:

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Készítsd el a 280 prímtényezős felbontását!

2. Feladat. Csilla talált egy 180 cm hosszú, 1 cm széles szalagot. Olyan 1 cm szélességű, egyforma téglalapokra akarja szétdarabolni, amelyek másik oldala is egész cm hosszúságú. Sorold fel az összes lehetőséget (beleértve azt is, hogy Csilla mégsem darabolja fel a szalagot)!

3. Feladat. Válaszd ki az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1.

36, 49, 32

4. Feladat. Milyen maradékot ad 25-tel osztva a 12345?

5. Feladat. Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók

a. 3-mal

283, 96, 1176

b. 6-tal

72, 76, 84

c. 4-gyel

48, 154, 228

6. Feladat. Zsoltinak az első 5 éves érettségi találkozója 2012-ben volt, ami szökőév. Ha 5 évente találkoznak, mikor lesz legközelebb szökőévben érettségi találkozó? (Négyévente van szökőév.)

7. Feladat. Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?

2. melléklet:
Dolgozat B változat

B csoport

Név:

Osztály:

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!

a. 8-cal:

b. 12-vel:

c. 3-mal:

2. Feladat. Sorold fel az 54 összes osztóját!

3. Feladat. Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 30 nap múlva dolgozatírás lesz. Julcsi jelentkezett, hogy 30 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz a dolgozatírás?

4. **Feladat.** Az alábbi számok közül melyek relatív prímek?
21, 45, 32

5. **Feladat.** Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot:

420

6. **Feladat.** Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Az egyes osztályok tanulóinak képei külön oldalra kerülnek. A képeket egymás mellé, sorokba rendezve ragasztják az évkönyvbe. Maximum hány képet rakhatunk egy sorba, ha azt szeretnénk, hogy minden oldalon mindegyik sorban ugyanannyi kép legyen és a végzős osztályokba 30, 24, illetve 36 tanuló jár?

7. **Feladat.** Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?

3. melléklet:
Dolgozat C változat

C csoport

Név:

Osztály:

Milyen formában tanulsz a matematikát? (Húzd alá!) normál/fakultáció/tagozat

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Készítsd el a 280 prímtényezős felbontását!

2. Feladat. Egy 45 cm hosszú szalagot szeretnénk feldarabolni kisebb, egyforma, egész cm hosszúságú szalagokra. Milyen hosszú darabokat kaphatunk? Sorold fel az összes lehetőséget beleértve azt is, hogy nem daraboljuk fel a szalagot.

3. Feladat. Adjuk meg az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyek legnagyobb közös osztója 1. Sorold fel az összes ilyen számpárt!

36, 49, 32

4. Feladat. Milyen maradékot ad 25-tel osztva a 12345?

5. Feladat. Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók

a. 3-mal.

283, 9672, 1176, 111111, 111112

b. 6-tal.

283, 9672, 1176, 111111, 111112

c. 4-gyel.

2345, 1234, 48148, 32100, 76432

6. Feladat. Egy uszodában két medence van. Az egyikben 24 naponta, a másikban 28 naponta cserélik le a vizet. Az uszoda zárva van azon a napon, amikor mindkettőben vizet kell cserélni. Ma zárva van az uszoda. Mikor lesz zárva legközelebb?

7. Feladat. Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?

4. melléklet:
Dolgozat D változat

D csoport

Név:

Osztály:

Milyen formában tanulsz a matematikát? (Húzd alá!) normál/fakultáció/tagozat

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!

a. 8-cal:

b. 12-vel:

c. 3-mal:

2. Feladat. Sorold fel az 54 összes osztóját!

3. Feladat. Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 100 nap múlva lesz az utolsó tanórájuk együtt. Julcsi jelentkezett, hogy 100 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz az utolsó matekóra?

4. **Feladat.** Az alábbi számok közül mely párok relatív prímek? Soroljuk fel az összes lehetőséget!
21, 45, 32

5. **Feladat.** Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot:

420

6. **Feladat.** Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Az egyes osztályok tanulóinak képei külön oldalra kerülnek. A képeket egymás mellé, sorokba rendezve ragasztják az évkönyvbe. Maximum hány képet rakhatunk egy sorba, ha azt szeretnénk, hogy minden oldalon mindegyik sorban ugyanannyi kép legyen és a végzős osztályokba 30, 24, illetve 36 tanuló jár?

7. **Feladat.** Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?

5. melléklet

Az egyes feladatokhoz tartozó kördiagramok

Kategóriák jelentése:

0: hozzá sem kezdett a feladathoz

1: írt valami kezdetlegeset, olvasta a feladatot, de nem tudta megoldani (pl. lerajzolta a szalagot)

2: elkezdte, de rosszul kezdte el

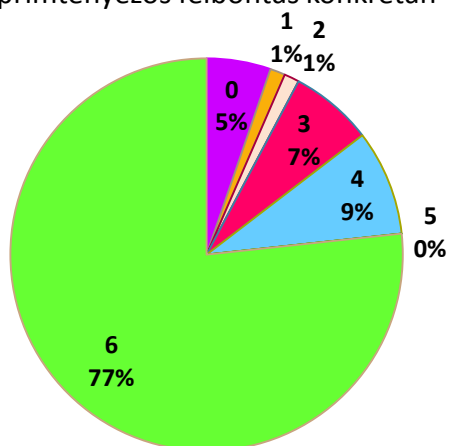
3: jól kezdte, de később elvi hiba (C oszthatósági szabályoknál: jót és rosszat is karikázott)

4: elvileg jó, de számolási hibát követett el (C oszthatósági szabályoknál: rosszat is karikázott)

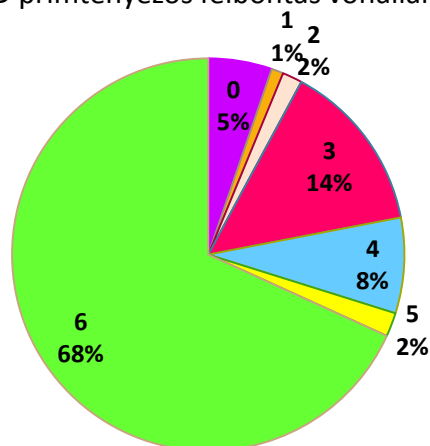
5: jól kezdte, de nem fejezte be vagy nem teljes a megoldás (C oszthatósági szabályoknál: kimaradt)

6: hibátlan megoldás

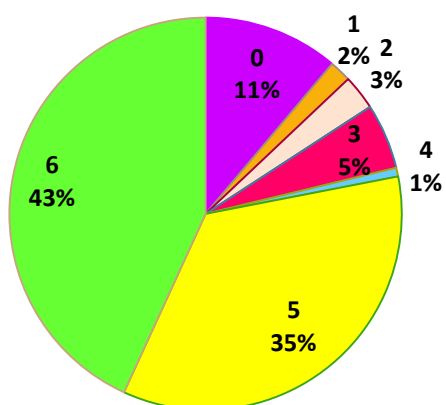
C prímtényezős felbontás konkrétan



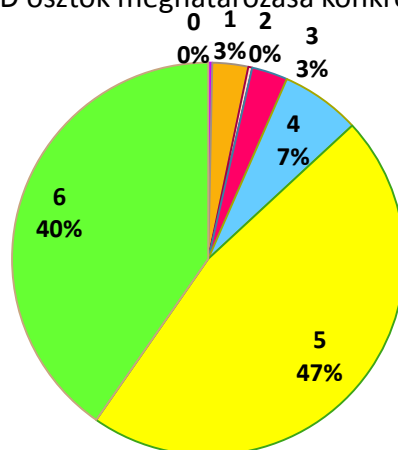
D prímtényezős felbontás vonallal



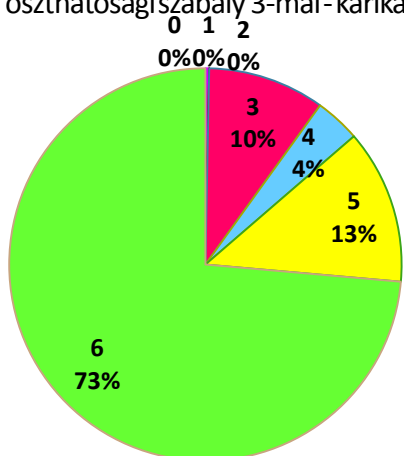
C osztók meghatározása - szöveges



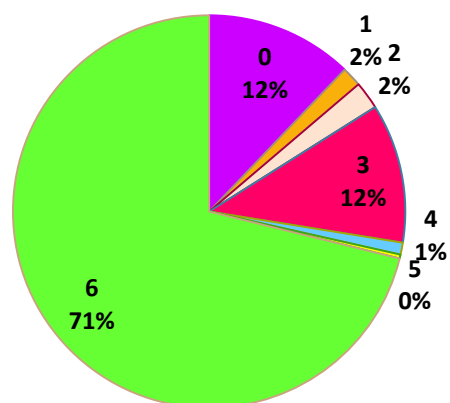
D osztók meghatározása konkrét



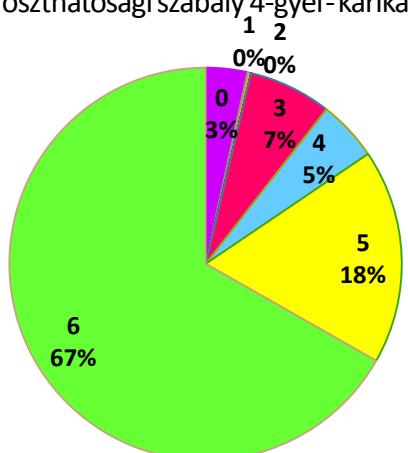
C oszthatósági szabály 3-mal - karikázós



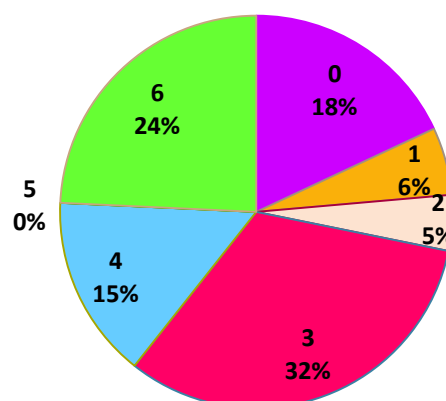
D oszthatósági szabály 3-mal - szöveges



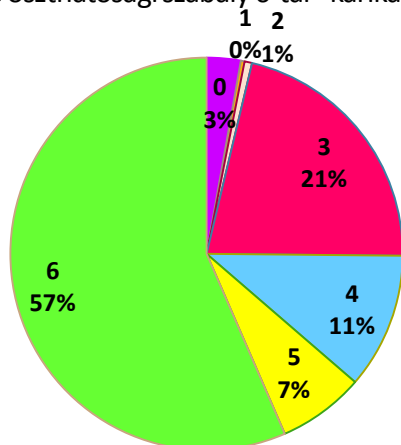
C oszthatósági szabály 4-gyel - karikázós



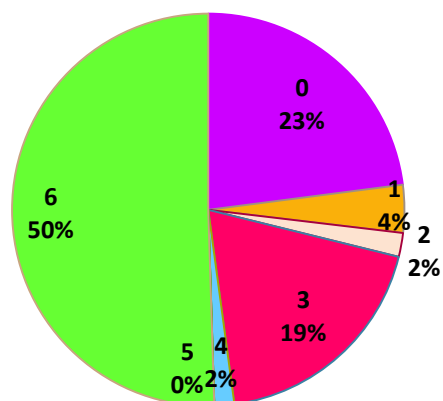
D oszthatósági szabály 8-cal - szöveges



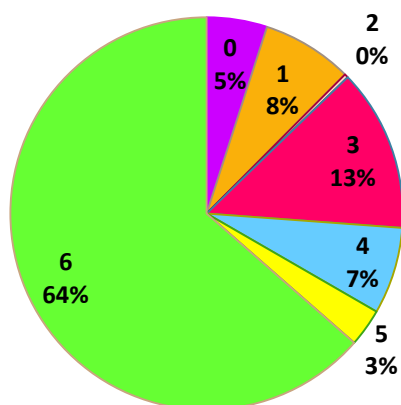
C oszthatósági szabály 6-tal - karikázós



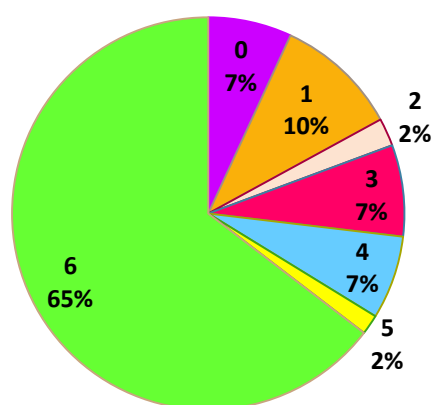
D oszthatósági szabály 12-vel- szöveges



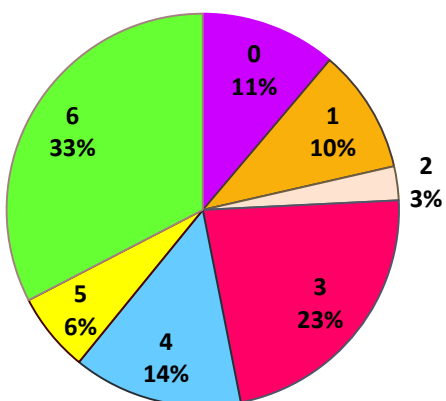
C maradékos osztás - konkrét



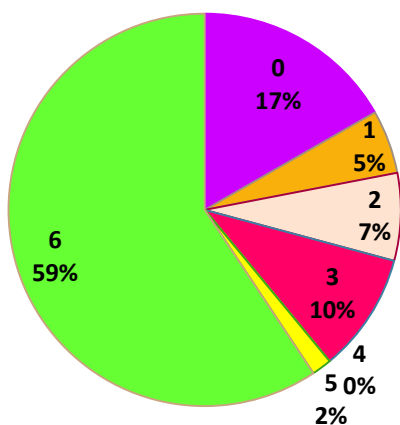
D maradékos osztás - szöveges



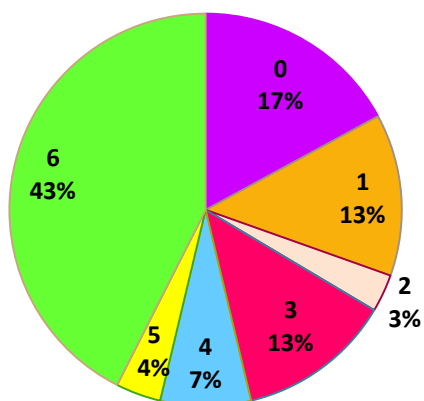
C legnagyobb közös osztó - konkrét



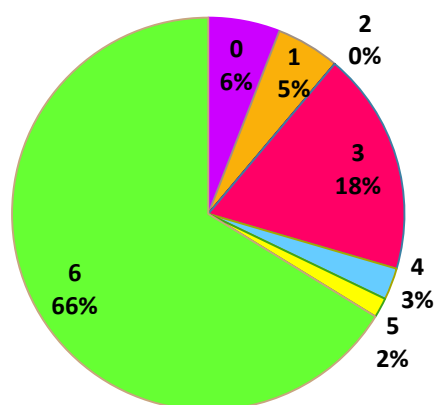
D legnagyobb közös osztó - szöveges



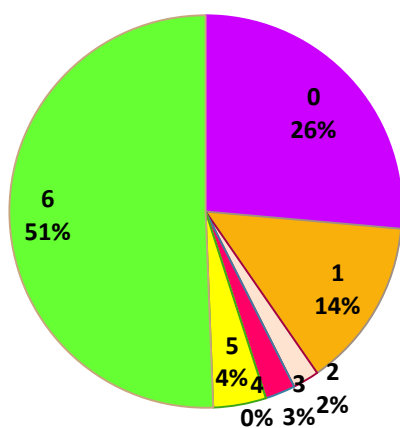
C legkisebb közös többszörös- szöveges



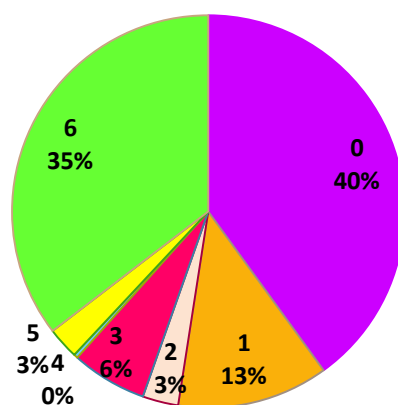
D legkisebb közös többszörös- konkrét



C legnagyobb közös osztó 1



D relatív prím



6. melléklet

Óraterv az Euler-Fermat-tétel középiskolai bevezetéséhez

Óraterv

Tantárgy: matematika

Osztály: 11. évfolyam

Az óra témája: Hatványozás modulo n

Az óra cél- és feladatrendszere: a tanítandó ismeretek (fogalmak, szabályok stb.) és az elérendő fejlesztési szint, tudásszint megnevezése, a fejlesztendő attitűd, készségek, képességek:

- A tanulók szerezzenek tapasztalatot a hatványok végződéseinek szabályszerűségeiről
- Tudjanak levonni következtetéseket tapasztalataikból
- Tudjanak általánosításokat megfogalmazni tapasztalataik alapján
- Tudják alkalmazni a megfogalmazott ismereteket
- a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése

A tanítandó ismeretek:

- hatványok végződésének vizsgálata
- periódus felismerése
- $\varphi(n)$ függvény fogalma, meghatározás speciális esetekben
- Euler-Fermat tétel
- Euler-Fermat tétel alkalmazása a hatványozás során, n speciális

Időkeret	A tanulóknak tevékenysége	A pedagógus tevékenysége	Célok és feladatok	Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	Megjegyzések
3 perc	Tanult fogalmak felelevenítése	Kérdések felvetése, rendszerezés	Ismétlés: maradék, maradékos osztás, prímszám, legnagyobb közös osztó, relatív prím fogalma	Megbeszélés	frontális munka		Ügyelni kell a precíz fogalom használatra
2 perc	Sorsolás után a csoporttagok egy asztalnál helyezkednek el	Sorsol a jelenlévő tanulókból	Csoportok kialakítása		frontális munka	számítógép, Teamup csoportszorsoló	Csoportnév, azon belül a tanulók betűkkel történő megkülönböztetése
5 perc	Kitöltik a megosztott google táblázatot számítógép segítségével	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében, az eszköz használatában	Az adott számok első 10 hatványának utolsó, ill. utolsó két jegyének meghatározása. Eredmények megfigyelése, következtetések megfogalmazása	Számológép használata	csoportmunka, közös dokumentum-szerkesztés	csoportonként számítógép, internet (esetleg mobiltelefon) a feladat nyomtatásában	a közös táblázatba gyorsan kerülhet sok adat; a táblázat adatai áttekinthetőek, könnyen vonhatók le belőlük következtetések
4 perc	Tapasztalatok megfogalmazás, általánosítás	Tapasztalatok rendszerezése, rögzítése a füzetben	a periódus felismerése a táblázat alapján, a táblázat hiányzó adatainak kitöltése számológép használata nélkül	Megfigyelés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben	kitöltött táblázat	a jobb érthetőség érdekében célszerű a táblázatban a periódusokat színezéssel is kiemelni
5 perc	A tanulók csoportban megoldják a kapott feladatokat	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében	Feladatok: Milyen számra végződik 16^{2014} ? Milyen számra végződik 13^{2345} ? Határozd meg 25^{2345} utolsó két számjegyét!	Tapasztalatok alkalmazása	Csoportmunka	nyomatott feladatlap	

				A megoldás megadása a felismert periódus alapján; A feladat és a 10-zel, 100-zal való oszthatóság kapcsolata		Ellenőrzés	Frontális munka	Teamup, csoport, majd csoporton belül tanuló sorsolása	a csoport minden tagjának el kell tudni magyarázni a csoport megoldását, hiszen bárki sorsolásra kerülhet
4 perc	A kisorsolt tanuló ismerteti a csoportja megoldását, többiek figyelnek	Pontosít, kiegészít, ha szükséges	A megoldások ellenőrzése	a $\varphi(n)$ függvény bevezetése	Számológép használata	Csoportmunka, közös dokumentum-szerkesztés	számítógép, internet (telefon) a feladat nyomtatásában	a közös táblázatba gyorsan kerülhet sok adat; a táblázat adatai áttekinthetőek, könnyen vonhatók le belőlük következtetések	
5 perc	Kitöltik a második megosztott google táblázatot számológép segítségével	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében, az eszköz használatában	a $\varphi(n)$ függvény bevezetése	Következtetések $\varphi(n)$ -nel kapcsolatban ($\varphi(n)=n-1$, ha n prím, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, ha $(a,b)=1$)	Ismeretszerzés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben			
4 perc	Kérdésekre válaszolnak a táblázat alapján	Rávezető kérdéseket tesz fel, megerősít	Euler-Fermat tétel: ha $(a,n)=1$, akkor $a^{\varphi(n)}$ n-nel osztva 1 maradékot ad Példafeladat: Mennyi maradékot ad 109^{355} 14-gyel osztva?	Ismeretszerzés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben				
5 perc	Tanári magyarázat figyelemmel kísérése	Tétel ismertetése							

4 perc	Alkalmazni a tanult tételt	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében	Feladat: Milyen nap lesz 15 ²⁰¹⁵ nap múlva?	Tanultak alkalmazása	Csoport munka		
2 perc	A keresett napot a csoportok ráírják egy lapra	Indoklást kér, pontosít, kiegészít, ha szükséges	A megoldások ellenőrzése	Ellenőrzés	Frontális munka	A csoportok képviselői egyszerre mutatják fel megoldásukat	Azonnal látható minden csoport megoldása
2 perc	Összegzés Házi feladat: Mennyit ad maradékul 44 ¹³⁵⁴ , ha 41-gyel osztjuk? Mi 303 ⁴⁰⁴ utolsó két jegye?						

1. táblázat:

szám (a):	3	16	13	25	15			
kitevő (n)	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó két számjegye	hatvány (a^n) utolsó két számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

Periódus								
----------	--	--	--	--	--	--	--	--

2. táblázat:

n	n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek	$\varphi(n)$ n-nél nem nagyobb, n- hez relatív prím pozitív egészek száma
1	1	1
2	1	1
3	1;2	2
4	1;3	2
5	1;2;3;4	4
6		2
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		