

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Palotay Dorka és Pozsonyi Enikő

**HA TUDOM, HOGY MIRŐL VAN SZÓ
- ISKOLAI FELADATOK ABSZTRAKT
ALGEBRAI HÁTTÉRREL**

TDK

Témavezető:
Szabó Csaba, MTA doktora, Egyetemi tanár

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. Célkitűzések és eredmények	5
1.2. Módszerek és következtetések	6
2. Iskolai feladat algebrai háttérrel	9
2.1. Sortündérek	9
2.2. Sortündérek - Iskolai megoldás 1	10
2.3. Sortündérek - Iskolai megoldás 2	12
2.4. Algebrai megoldás - absztrakt vektortér	12
2.5. Algebrai megoldás - mátrixok vektortere	14
2.5.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással	16
2.6. Algebrai megoldás - Mátrixok sor- és oszloptere	17
2.7. Algebrai megoldás - Műveletáblák	18
3. Alkalmazások	20
3.1. 2×2 -es	20
3.2. Megoldás - 2×2 -es	20
3.2.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással	21
3.3. Pénzérme	22
3.4. Készítsünk középiskolai megoldást	23
4. Egy új feladat	24
4.1. A herceg és a tetrisz	24
4.1.1. Algebrai megoldás - a régi ötlet	25
4.2. További feladatok	25
4.2.1. Szákszög	25
4.2.2. Megoldás	25
4.2.3. Középiskolai megoldás	26
4.2.4. K - szög	27
5. Műveletáblák	28
5.1. 1996	28
5.2. Egy új feladat	29

1. Bevezetés

"Miért kell olyan dolgokat tanulni az egyetemen, amiket később sehol nem fogunk használni?"

Kovács Veronika

Általában olyan emberek jelentkeznek matematika szakra, akik érdeklődnek a matematika iránt (vagy akiknek kevés a pontszáma más szakokra). Mégis sokszor felmerül a tanár szakos hallgatókban az a kérdés, hogy az egyetemi anyagot fogják-e még valamire használni, miért kell ezt vagy azt az anyagrészt megtanulni. Természetesen tanár szakos hallgatóként mindenki tudja, hogy ahhoz, hogy iskolában taníthasson, ismernie kell a felsőbb matematikát is. A közvetlen kapcsolat azonban az egyetemi matematika és az iskolai matematika között sokszor nem látszik. A különböző egyetemi kurzusokon a hallgatók megismerkednek matematikai módszerekkel és struktúrákkal, de általában hiányoznak a tanulásból azok a pillanatok, amikor világossá válik számukra, hogy ezt a tudást a későbbiekben mikor, és milyen formában tudják alkalmazni.

1.1. Célkitűzések és eredmények

Dolgozatunk célja annak megmutatása, hogy egy matematikatanár igenis segítségül hívhatja az egyetemen tanultakat az iskolai feladatok megoldásakor, valamint új feladatok kitalálásakor. És annak is, hogy ezen feladatok esetén az absztrakt, felsőbb matematikát igénylő gondolatmenetek hogyan alakíthatók át középiskolás, egyetemi háttérrel nélkülöző megoldássá. Középiskolai elemi és versenyfeladatokon keresztül mutatjuk meg, hogyan használhatjuk föl az absztrakt algebrából tanultakat az iskolában. További célunk, hogy ez bekerüljön az egyetemi oktatásba is, vagyis az oktatók az iskolai példákat bevigyék a tanárszakos órákra, és ezáltal ráirányítsák a hallgatók figyelmét az iskolai feladatok és az órán tanult anyag kapcsolatára.

Bár ez utóbbi cél kicsit nagyratörőnek tűnik, részben meg is valósult. Dolgozatunkat eljuttattuk az összes (volt) tudományegyetem és az egri Eszterházy Károly Főiskola algebra oktatóihoz, és megkértük, írják meg a témához való hozzáállásukat és a dolgozatról való véleményüket. A fogadtatás a vártnál is pozitívabb volt. Dolgozatunk első két feladata a megoldásokkal együtt elhangzott az ELTE TTK BSc matematika-tanár szakirány reguláris Algebra 3 előadásán:

<http://bolyai.cs.elte.hu/~csaba/bboard/2012o/alg3/alg3sort.pdf>

<http://bolyai.cs.elte.hu/~csaba/bboard/2012o/alg3/ea12.pdf>

Az általunk megkérdezett oktatók:

- dr. B. Szendrei Mária, tanszékvezető egyetemi tanár, Szegedi Tudományegyetem, TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék
- dr. Csörgő Piroska, egyetemi tanár, Eszterházy Károly Főiskola, TTK, Matematika Tanszék;
- dr. Horváth Gábor, az Algebra Kutatócsoport vezetője, Debreceni Egyetem, TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék;
- dr. Hermann Péter, tantárgyfelelős, egyetemi docens, Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék;
- dr. Szabó László, a lineáris algebra tárgy oktatója, egyetemi docens, Szegedi Tudományegyetem, TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék.

mind elismerőleg nyilatkoztak munkánkról. Mindnyájan érdemesnek tartják a feladatokat az egyetemi oktatás bővítésére és a tudományegyetemek oktatói mindnyájan ígéretet, illetve feltételes ígéretet tettek arra, hogy ők is tanítani fogják az általunk összeállított anyagot. Az erről szóló leveleik a dolgozat mellékletében találhatóak.

1.2. Módszerek és következtetések

Kutatásunk során összegyűjtöttük a különböző feladatgyűjteményekből és az elmúlt 50 év matematika versenyeiről az algebrahoz kapcsolódó feladatokat. Ezek közül a dolgozatban csak versenyfeladatok szerepelnek, és a számos módszer közül is csak néhány olvasható terjedelmi korlátok miatt. A feladatoknak megvizsgáltuk az absztrakt algebrai háttérét, és rájuk frappáns, rövid megoldást adtunk. Az algebrai megoldás segítségével, ahol lehetett, új elemi megoldásokat kerestünk. Dolgozatunkban ezek közül mutatunk be néhányat. A sok módszer közül két nagyobb témakörre összpontosítottunk: a moduláris lineáris algebra és a művelettáblákra. Az előbbihez több, az utóbbihoz kevesebb feladatot találtunk. A polinomokkal kapcsolatos módszerekkel (gyöktesztek, gyökök és együtthatók közötti összefüggések, stb.) megoldható feladatok feldolgozása egy másik dolgozat témája lesz terjedelmi és didaktikai okok miatt.

Az absztrakt algebra alkalmazásainak összegyűjtése nem számít újdonságnak. Csak ebben a témában 1983 óta 13 monográfia jelent meg, ezek közül [17] két kiadást is megért. A lineáris algebra alkalmazásairól megjelent könyvek száma 100 fölött van. Közülük az első ([22], 1955) numerikus technikákat mutat be: valós sajátértékű mátrixokat alkalmaz különböző típusú polinom sorozatok generálására és különböző típusú gradiensek kiszámolására. Ezután 20 évet kellett várni arra, hogy más területekre is kiterjedjen

ez az alkalmazás. Lineáris programozás-beli és játékelméleti alkalmazásokról szól a [23] monográfia, és ez már egy terjedelmesebb hivatkozás jegyzéket is tartalmaz további kutatásokhoz. A könyv népszerűségét mutatja, hogy 4 év alatt megért két kiadást, és oroszra is lefordították. Az első kódelméleti alkalmazások 1989-ben jelentek meg a kétkötetes, egyetemi kurzusokhoz szánt [9], [10] sorozatban. Magyar nyelven 2002-ben jelent meg Prasolov könyve [18],[19], amelyet több felsőbb egyetemi kurzus is használ. Szintén megjelent magyarul az első magyar származású Abel-díjas matematikus, Lax Péter két kiadást is megért könyve [15], [16]. Lax Péter az Abel-díjat bonyolult parciális differenciálegyenletek megoldásáért nyerte el. Könyvében szerepelnek a lineáris algebra ilyen irányú alkalmazásai is.

A témánkhöz legközelebb a legendás Babai-Frankl [1] áll, amelyben a szerzők felsorolják a lineáris algebra legszebb matematikai alkalmazásait, elsősorban a kombinatorikában és a geometriában. Ezen alkalmazások azonban középiskolai tudást meghaladó ismereteket igényelnek, elemi bizonyításai az ott felsorolt tételeknek nem ismert.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy az algebra és lineáris algebra alkalmazásai terjedelmes irodalommal rendelkezik. Ezen alkalmazások elsősorban matematikán belüli, a matematika más ágait elősegítő alkalmazások. A témakör középiskolai alkalmazásairól ezekben semmi nem szerepel.

A lineáris algebra alkalmazásainak fontosságát és elterjedtségét mutatja az is, hogy az ELTE Matematika BSc elemző szakirányon a 6. félévben kötelező tárgy a Lineáris algebra alkalmazásai. A tárgy tematikája széles spektrumot ölel fel, szereplnek benne kombinatorikai, analitikus, geometria és valószínűségszámítás-beli alkalmazások is.

Az általunk ismertetett feladatok megoldásához alapvető ($\mathbb{Z}_2$ fölötti) lineáris algebrai és elemi absztrakt algebrai ismeretek szükségesek. Ezek: test, vektortér, bázis, függetlenség, determináns, sajátérték, merőlegesség, illetve csoport-axiómák, művelettábla (Cayley-táblázat). Ezen ismeretek bármely lineáris algebra vagy absztrakt algebra jegyzetben megtalálhatók. Ma az ELTE-n elsősorban [4]-t és [12]-t használják. Debrecenben ezeken kívül a [8, 11, 14, 20] könyvekből oktatják a lineáris algebrát, ám [11]-ben és [20]-ben csak valós és komplex test fölötti vektorterek szerepelnek, így ezek nem adnak komoly segítséget munkánkhoz. Szegeden a már említett Szabó László jegyzete [24] mellett [13]-t is használják.

Absztrakt algebrakönyvből is bőséges a kínálat. A klasszikusnak számító [2] feladatgyűjteményt mindenhol más-más jegyzettel egészítik ki, Debrecenben például [3]-vel [7]-vel. Szegeden Schmidt Tamás [21] mellett ajánlják a [6] sorozatot is, [5]-vel együtt. Ezek bármelyikében szerepelnek a nekünk szükséges fogalmak.

A dolgozat elkészítésekor sokan támogattak minket, külön szeretnénk a

segítséget megköszönni azoknak az egyetemi oktatóknak és kutatóknak, akik átolvasták munkánkat és azt értékelték, ellátták megjegyzésekkel. Itt mondunk köszönetet Nikházy Lászlónak, aki Juhász Péter és Pósa Lajos egyik segítője, és aki folyamatosan segítette munkánkat észrevételeivel és javaslataival.

2. Iskolai feladat algebrai háttérrel

"Az a baj, hogy ha a hallgatók meglátnak egy sakktáblát, nem veszik észre, hogy egy 64 dimenziós vektortérrel van dolguk."

Szabó Csaba

Első két példánk a Pósa Lajos féle matematikai tehetséggondozó táborokban egy gyakori feladvány, ami garancia arra, hogy nem teljesen egyszerű feladattal van dolgunk. Pósa Lajos legendás hírű tehetséggondozó matematikatanár. A dolgozat egyik szerzőjének volt szerencséje részt venni megfigyelőként és segítőként matematika táboraiiban. Pósa Lajos 1988 óta szervez saját táborokat, melyek sokban különböznek a hagyományos gyerektáboroktól. Vannak hétvégi táborok, melyek péntek délutántól vasárnap délutánig tartanak, és egy hetes nyári táborok. Mindkettő meghívásos alapon működik. A nyári táborokba általában a legtehetségesebb, versenyeken is jól szereplő diákokat hívja el. Ezekben Pósa Lajos a legkülönbébb módon készíti a diákokat a matematikával való foglalkozásra. A gyerekek már hetekkel, hónapokkal a tábor előtt házi feladatokat kapnak. Egy táborban körülbelül 20-25 diák vesz részt, akik általában 2-4 fős csoportokban dolgoznak. A tábor folyamán a diákok a foglalkozások és játékok mellett dolgozatokat is írnak.

Az általunk feldolgozott két feladatot is ezeknek a táboroknak az anyagából merítettük. Úgy választva, hogy míg ott a nehezebb feladatok között vannak számontartva, mi absztrakt eszközökkel viszonylag egyszerű megoldást találjunk.

Juhász Péter Pósa Lajos első tanítványainak egyike, és azóta állandó segítőtője. Ma már ő is önálló "Pósa" táborokat szervez. Az ELTE-TTK-n reguláris tanóra keretében tanítja a Pósa Lajostól eltanult módszereket elsősorban matematikatanár szakos hallgatók számára, a Hogyan foglalkozzunk tehetséges gyerekekkel? című egyetemi kurzuson. Az első két feladattal ezeken az órákon találkoztunk. Különösen büszkék vagyunk arra, hogy a feladatok lineáris algebrai megközelítését ő sem ismerte. Azonban mostantól tanítani fogja egyetemi óráin, az erről szóló elismerő nyilatkozata a mellékletben olvasható.

2.1. Sortündérek

Jancsi kapott egy gyönyörű szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Jancsi meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencséire 16 jótündér a segítségére sietett.

A sakktábla minden sorához és minden oszlopához tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy a saját sorában vagy oszlopában a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott sorban vagy oszlopban minden feketét fehérre, és minden fehérre feketére színez át.

Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktábla színezést?

Amikor a kérdésre keressük a választ, akkor nem elégszünk meg egy egyszerű igennel vagy nemmel, hanem ennél sokkal részletesebb indoklást szeretnénk. Arra is kíváncsiak vagyunk, hogy egyáltalán mely színezésekből állítható vissza az eredeti sakktábla. Amikor ezt a feladatot kidolgoztuk, akkor ezt olyan sorrendben tettük, ahogy Pósa Lajos a táborokban, és Juhász Péter az órán.

2.2. Sortündérek - Iskolai megoldás 1

Rutinos feladatmegoldóknak világos, de kezdők is néhány próbálkozás után észrevehetik, hogy amikor egy tündér megváltoztatja a saját sorát vagy oszlopát, akkor abban a sorban vagy oszlopban a fekete négyzetek számának paritása nem változik. Ha az adott sorban vagy oszlopban x db fekete négyzet volt, akkor a változtatás után $8 - x$ fekete négyzet lesz. Ha x páros, akkor $8 - x$ is páros, illetve ha x páratlan, akkor $8 - x$ is páratlan. Így a tündérek változtatása a feketék számának paritását mindvégig változatlanul hagyja. Ha tehát a gonosz boszorkány által megváltoztatott sakktábla olyan, hogy páratlan sok fekete mező van rajta, akkor a tündérek segítségével nem lehet helyreállítani. Ezzel megoldottuk az eredeti feladatot: a válasz általában nem. Felmerül azonban a kérdés, hogy melyek azok a színezések, amelyek megjavíthatók. Például igaz-e, hogy azok megjavíthatók, amelyekben páros sok fekete négyzet van? A válasz nyilvánvalóan nem, hiszen az előző gondolatmenet sorokra és oszlopokra is elmondható volt, azaz mindig minden sorban és oszlopban is páros sok fekete négyzet kell, hogy legyen. Itt már látszik, hogy újabb és újabb feltételek merülhetnek fel, ezért jobb lesz a színezések szisztematikus vizsgálata.

Nézzük meg, mi történik egy kis négyzet szemszögéből, amikor a tündérek próbálják megjavítani a sakktáblát. Egy kis négyzetre 2 tündér van hatással: az oszloptündére és a sortündére. Amikor egy tündér változtat, akkor a kis négyzet színe megváltozik. Egy újabb változtatás után viszont ismét az eredeti színét nyeri vissza, az ő szemszögéből tehát csak annak van jelentősége, hogy összesen hányszor lett megváltoztatva, a tündérek sorrendjétől függetlenül. Hasonlóan, ha egy tündér változtat, akkor a kis négyzet színe megváltozik, majd ha ez a tündér újra változtat, akkor négyzetünk visszakapja eredeti színét. Így csak az számít, hogy egy tündér páros vagy páratlan

sokszor változtatott. Ha páros sokszor, az olyan, mintha nem változtatott volna 1-szer sem, ha pedig páratlan sokszor, az megfelel annak, hogy csak 1-szer változtatott. Ez minden kis négyzetre egyszerre igaz, tehát feltehető, hogy minden tündér 0-szor vagy 1-szer változtathat.

Vegyük észre, hogy minden színezés elérhető úgy is, hogy az első sortündér nem változtat. Ha ugyanis ő változtat, és így eljutunk egy sakktáblaszínezésből egy másik színezéshez, akkor ehhez a színezéshez el lehet jutni mégeggyféleképpen: minden tündér pontosan az ellenkezőjét csinálja, mint az előbb. Ha az előbb egy tündér változtatott, akkor most nem változtat, ha pedig nem változtatott, akkor most változtat. Így ugyanazt a színezést kapjuk meg.

Tegyük fel tehát, hogy az első sortündér nem változtat. Az oszloptündérek ilyenkor kényszerhelyzetben vannak: meg kell javítaniuk a sakktábla első sorát. Minden oszloptündér eldönti, hogy változtat-e vagy sem, aszerint, hogy a saját oszlopában az első négyzet színe megegyezik-e az eredeti sakktáblaszínezéssel. Ha megegyezik, akkor nem változtat, ha nem egyezik meg, akkor változtat. Ezután az oszloptündérek többet nem szerepelnek, mert tudjuk, hogy csak 0-szor vagy 1-szer változtathatnak. Így a sortündérek keze is meg van kötve: meg kell javítaniuk az első oszlopot. Hasonlóan az oszloptündérekhez, a sortündérek is eldöntik, hogy változtatnak vagy sem, aszerint, hogy a saját sorukban az első négyzet színe megfelel-e az eredeti sakktáblának. Ha az első oszlop is helyreállt, a sortündérek sem szerepelnek többet. Ha most a sakktábla színezése megegyezik az eredeti sakktáblaszínezéssel, akkor készen vagyunk, ha pedig nem, akkor nem is lehet helyreállítani a színezést.

Vegyük észre, hogy már akkor látszik a sakktáblán, hogy meg lehet-e javítani, amikor a 8 oszloptündér megjavította az első sort. A sortündérek pontosan akkor tudják megjavítani a színezést, ha ekkor minden további sor pontosan olyan, mint az első, vagy annak az ellentettje. Az a feltétel, hogy minden sor az első sorral megegyezik, vagy annak ellentettje, az oszloptündérek hatása során sem változik meg. Tehát egy sakktábláról ránézésre eldönthető, hogy megjavítható-e vagy nem, hiszen pontosan azok a sakktáblák hozhatók helyre, amelyekben bármely két sor vagy megegyezik, vagy egymás ellentettje. $\square$

Érdeemes megjegyezni, hogy bár a mi megoldásunk koherens és folytonos, még a tehetséges diákok sem oldják meg ebben a folyamatban. A táborokban és az órán Juhász Péter számos segédfeladatot ad fel közben, hogy az észrevételeket megtehessek.

2.3. Sortündérek - Iskolai megoldás 2

Miután megállapítottuk, hogy a páratlan sok fekete mezőt tartalmazó sakktáblát nem lehet visszaállítani az eredeti színezésre, itt is felmerül a kérdés, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy színezésből el lehessen érni a sakktábla színezést.

Meggondolható, hogy ha egy X színezésből egy lépéssorozattal elérhető egy Y színezés, akkor az Y színezésből is elérhető az X , ha visszafelé végrehajtjuk ugyanazokat a lépéseket. Ebből következik, hogy az olyan színezéseket meg lehet javítani, amelyek elérhetők az eredeti színezésből. Így a kérdés úgy is fogalmazható, hogy melyek azok a színezések, amelyek az eredeti sakktáblából elérhetők? Az eredeti színezésben minden sor vagy megegyezik az elsővel, vagy annak ellentettje, és minden változtatás után megmarad ez a tulajdonsága a sakktáblának. Tehát csak ilyen színezések érhetők el. Be kell még látnunk, hogy minden ilyen elérhető, ehhez pedig megadunk egy jó lépéssorozatot. Először az oszlopokat színezzük át úgy, hogy az első sor megegyezzen X első sorával, nevezzük ezt a színezést Y -nak. Ekkor igaz maradt az a tulajdonság, hogy minden sor az első sorral megegyezik, vagy ellentettje, tehát az Y színezés k -adik sora az X színezés k -adik sorával azonos, vagy az ellentettje, ez pedig a sor átszínezésével a megfelelőre állítható.

□

Ehhez a megoldáshoz azt kell hozzátenni, hogy bár rövidnek tűnik, magas fokú absztrakciós és feladatmegoldó képességet feltételez a diákokról. Az, hogy ezek a műveletek invertálhatóak, és ezért elég a célszínezésből kiindulni, még nem elég ahhoz, hogy "észrevegyük", mik az elérhető színezések. Erre csak olyanok képesek, akik már számos ilyen feladatot láttak előtte. Gondoljunk csak bele, hány sakktábla átszínezést kellene papíron kézzel végrehajtanunk, hogy ilyen megállapításra jussunk.

2.4. Algebrai megoldás - absztrakt vektortér

Nézzük meg, hogy egy matematikus hogyan fordítaná le az algebra nyelvére ezt a feladatot.

A megfeleltetés: Legyen $\underline{n}_{ij}$ az i . sor j . négyzete, és V az $\underline{n}_{ij}$ vektorok által generált vektortér $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ekkor látható, hogy V dimenziója 64, hiszen az $\underline{n}_{ij}$ vektorok függetlenek, és 64 darab van belőlük (ennyi négyzet van a sakktáblán). Minden $\underline{v} \in V$ vektor felírható a következő alakban: $\sum \lambda_{ij} \underline{n}_{ij}$, ahol λ_{ij} értéke vagy 0 vagy 1. Ekkor minden sakktábla színezésnek megfelel egy V -beli vektor, ahol az $\underline{n}_{ij}$ együtthatója 0, ha a neki megfelelő négyzet az adott színezésben fehér, és 1, ha fekete. (Természetesen a fekete és fehér négyzetek szerepe felcserélhető.) Így egy kölcsönösen egyértelmű

megfeleltetést definiáltunk a sakktábla színezések és a V -beli vektorok között.

Az eredeti sakktábla színezésnek megfelelő vektort jelöljük $\underline{a}$ -val. Ekkor

$$\underline{a} = \sum_{i+j \text{ páros}} \underline{n}_{ij}$$

A tündérek hatása: Nézzük meg, hogy amikor egy tündér megváltoztatja egy négyzet színét, mi történik az annak a négyzetnek megfelelő vektorral. Ilyenkor az adott vektor együtthatója 1-ről 0-ra, vagy 0-ról 1-re változik. (Például, ha a négyzet színe eredetileg fekete volt, akkor a neki megfelelő vektor együtthatója 1. A tündér változtatása után a négyzet színe fehér lesz, tehát az együtthatója 0-ra változik.) $\mathbb{Z}_2$ felett ez nem jelent mást, minthogy az adott együtthatóhoz 1-et hozzáadunk. Egy tündér egy egész oszlopra vagy sorra van hatással, tehát amikor ő változtat, akkor abban az oszlopban vagy sorban minden együtthatóhoz hozzáadunk 1-et. A k . oszlophoz tartozó tündér hatásának megfelelő vektor:

$$\underline{o}_k = \sum_{i=1}^8 \underline{n}_{ik}$$

Azaz a k . oszlop megváltoztatásakor ezt a vektort adjuk hozzá az aktuális színezésnek megfelelő vektorhoz. Hasonlóan a sortündérekre:

$$\underline{s}_k = \sum_{j=1}^8 \underline{n}_{kj}$$

A probléma modellezése: Adott egy tetszőleges színezés, azaz egy $\underline{v} \in V$ vektor. Ehhez a sortündérek és az oszloptündérek változtatásakor a nekik megfelelő $\underline{o}_k$ és $\underline{s}_k$ vektorokat adjuk hozzá. Az eredeti színezés akkor érhető el, ha az $\underline{a}$ vektor előáll a fentiek lineáris kombinációjaként, azaz benne van a $\underline{v}$, $\underline{o}_k$ és $\underline{s}_k$ vektorok által generált altérben.

A feladat megoldása: Látható, hogy ha egy tetszőleges színezésből elérhető az eredeti egy változtatás-sorozattal, akkor az eredetiből is elérhető az adott színezés, ha visszafelé végrehajtjuk ugyanazt a változtatás-sorozatot. Figyeljük meg, hogy a teljesen fehér sakktáblából elérhető az eredeti, ha a páratlan sorokhoz és a páros oszlopokhoz tartozó tündérek változtatnak, vagyis vektorokkal az alábbi módon:

$$\sum_{k \text{ páratlan}} \underline{s}_k + \sum_{k \text{ páros}} \underline{o}_k = \underline{a}$$

A megoldáshoz azoknak a színezéseknek megfelelő vektorokat keressük, melyek elérhetőek a fehér sakktáblából, azaz a $\underline{0}$ -ból. Hiszen ezekből elérhető a fehér sakktábla, amelyből a fentiek szerint megkapható az eredeti.

A 16 tündérhez tartozó vektorok közül 15 független. Ezek halmazát $\mathcal{B}$ -vel jelöljük:

$$\mathcal{B} = \{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \dots, \underline{o}_8, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \dots, \underline{s}_8\}$$

A $\underline{0}$ -ból elérhető vektorok ezek lineáris kombinációiként állnak elő, azaz egy adott $\underline{v}$ vektort akkor és csak akkor kaphatunk meg, ha

$$\underline{v} \in \langle \mathcal{B} \rangle.$$

Tehát az eredeti színezés pontosan az ilyen $\underline{v}$ vektoroknak megfelelő színezésekből érhető el. Egy $\underline{v}$ vektorról pedig Gauss-eliminációval könnyedén eldönthető, hogy teljesíti-e ezt a feltételt. $\square$

2.5. Algebrai megoldás - mátrixok vektortere

Ebben a megoldásban vektorok helyett mátrixokkal dolgozunk. Nagy előnye az előzőhöz képest, hogy sokkal szemléletesebb, ugyanis világosan látszik a sakktábla és az algebrai leírás közötti kapcsolat.

A megfeleltetés: Minden színezésnek megfeleltetünk egy 8×8 -as mátrixot úgy, hogy a sakktábla i . sorának j . négyzetének a mátrix a_{ij} eleme felel meg. Ha ez a négyzet fekete, akkor $a_{ij} = 1$, ha pedig fehér, akkor $a_{ij} = 0$. Az eredeti sakktábla színezésnek megfelelő mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A teljesen fehér sakktáblának megfelelő nullmátrix:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a 8×8 -as mátrixok és a sakktábla színezések között.

A tündérek hatása: Az előző megoldásban leírtakhoz hasonlóan a tündérek változtatása itt is a $\mathbb{Z}_2$ feletti 1 hozzáadását jelenti egy egész sorhoz vagy oszlophoz. Ennek megfelelően például a 3. oszloptündérnek megfelelő mátrix a következő:

$$\mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan a 2. sortündérhez tartozó mátrix:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Így amikor egy tündér változtat, akkor az aktuális sakktáblának megfelelő mátrixhoz az adott tündér mátrixa adódik hozzá.

A probléma modellezése: Hasonlóan az előző algebrai megoldáshoz, egy adott sakktábla színezésnek megfelelő $\mathbf{C} \in \mathbf{M}^{8 \times 8}(\mathbb{Z}_2)$ mátrixból akkor érhető el az eredeti sakktábla $\mathbf{A}$ mátrixa, ha az előáll a $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}_k$ és $\mathbf{O}_k$ mátrixok lineáris kombinációjaként. Vagyis, ha $\mathbf{A}$ felírható

$$\mathbf{C} + \sum_k \lambda_k \mathbf{S}_k + \sum_k \mu_k \mathbf{O}_k$$

alakban, ahol λ_k és μ_k értéke 0 vagy 1 lehet. Vagy másképp, ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C} + \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \dots, \mathbf{O}_8 \rangle$.

A feladat megoldása: Vegyük észre, hogy

$$(1) \quad \sum_k \mathbf{S}_k + \sum_k \mathbf{O}_k = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \sum_{k \text{ páratlan}} \mathbf{S}_k + \sum_{k \text{ páros}} \mathbf{O}_k = \mathbf{A}$$

Ez a korábbiakhoz hasonlóan pontosan azt jelenti, hogy a teljesen fehér sakktáblához tartozó $\mathbf{0}$ mátrixból elérhető az eredeti $\mathbf{A}$ mátrix, és fordítva. Így azok a színezések javíthatók meg, amelyek $\mathbf{C}$ mátrixa megkapható a nullmátrixból a sortündéreknek és az oszloptündéreknek megfelelő mátrixok lineáris kombinációjaként, azaz ha létezik $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_2$, hogy

$$(2) \quad \mathbf{C} = \sum_{i=2}^8 \lambda_i \mathbf{S}_i + \sum_{i=1}^8 \mu_i \mathbf{O}_i$$

A tündéreknek megfelelő mátrixok közül csupán 15 szerepel a fenti lineáris kombinációban, mivel a 16 tündérmátrix közül mindössze 15 független $\mathbb{Z}_2$ felett, az első sor előállítható a többi lineáris kombinációjaként. Így az is megállapítható, hogy összesen 2^{15} mátrix tesz eleget a feltételeknek, tehát 2^{15} olyan sakktábla színezés van, amely megjavítható. $\square$

2.5.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással

Az algebrai megoldás eredményeként megkaptuk azokat a $\mathbf{C}$ mátrixokat, amelyekből elérhető az $\mathbf{A}$ mátrix. Feladatunk az algebrai feltételek lefordítása úgy, hogy középiskolai szinten is megfogalmazhassuk, hogy mely sakktábla színezések lesznek megjavíthatók. Ehhez vizsgáljuk a (2) egyenletet. A (2) egyenlet közvetlenül megadja az előállítható mátrixok halmazát. Így, ha ezt lefordítjuk középiskolás nyelvre, akkor közvetlenül megkapjuk az elérhető színezéseket.

- (i) A $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_2$ tulajdonság szerint a mátrixok együtthatója 0 vagy 1 lehet. Ami megfelel annak, hogy feltehető, hogy az egyes tündérek 0-szor vagy 1-szer változtatnak.
- (ii) Az összeadás kommutativitása éppen azt jelenti, hogy a tündérek tetszőleges sorrendben változtathatnak.
- (iii) Az, hogy az $\mathbf{S}_1$ mátrix nem szerepel (2)-ben, nem jelent mást, mint hogy feltehetjük, hogy az első sortündér nem változtat.

Nézzük meg, hogy milyen mátrixok kaphatók meg (2) eredményeként. Az (iii) feltétel miatt a $\mathbf{C}$ mátrix első sorát az $\mathbf{O}_i$ mátrixok határozzák meg. Jelölje c_{ij} a $\mathbf{C}$ mátrix i . sorának j . elemét. Ha $c_{1j} = 1$, akkor az $\mathbf{O}_j$ mátrix együtthatója 1, ha $c_{1j} = 0$, akkor a mátrix együtthatója is 0. Az $\mathbf{S}_j$ mátrixok együtthatóját pedig az első oszlopban szereplő elemek segítségével kaphatjuk meg az előzőhöz hasonló módon. Ezzel a módszerrel vagy megkapjuk a $\mathbf{C}$ mátrixot, vagy ha nem, akkor nem is érhető el. Tehát kaptunk egy algoritmust, amely segítségével könnyen meghatározhatjuk, hogy mely

sakktábla színezésekből érhető el az eredeti. Először az oszloptündérek segítségével beállítjuk az első sor megfelelő színezését, majd a sortündérekkel az első oszlopét. Így vagy elérjük a kívánt állapotot, vagy az nem is lehetséges.

Most pedig nézzük meg, hogy mit is jelent ez szemléletesen. $\mathbf{C}$ mátrixban bármely két sor vagy megegyezik, vagy épp egymás ellentettje. Mivel a mátrixok és a sakktáblák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk meg, ezért ugyanez lesz igaz a megjavítható sakktáblákra is.

2.6. Algebrai megoldás - Mátrixok sor- és oszloptere

Az első megoldás túl absztrakt, inkább matematikus szakos hallgatóknak való. A második mindenki által könnyen elérhető, így kiváló példa arra, amit e dolgozatban demonstrálni szeretnénk. Szerencsére a feladat tündérei olyan szépen viselkednek, hogy tudunk mutatni egy még kevésbé absztrakt mátrixos bizonyítást.

Legyen $\mathbf{A}$ a sakktáblának megfelelő szokásos 8-szor 8-as mátrix, ahol $a_{ij} = 1$, ha az (i, j) -edik mező fekete és $a_{ij} = 0$, ha fehér. Egészítsünk ki minden 8-szor 8-as mátrixot egy 9-szer 9-es mátrixszá az alábbi módon: ragasszunk hozzá egy 9. sort és 9. oszlopot, amelyek minden koordinátája 1, kivéve az utolsó. A sakktábla-színezésből például az alábbi mátrix adódik:

$$\mathbf{S}^{ext} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A sor és oszloptündérek hatása nem más, mint az utolsó sor, illetve oszlop hozzáadása az i -edik sorhoz, oszlophoz. Ha Gauss-eliminálunk először az utolsó sor, majd az utolsó oszlop segítségével, akkor a $\mathbf{0}^{ext}$ -mátrix kiterjesztését kapjuk:

$$\mathbf{0}^{ext} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A Gauss-elimináció megfordíthatósága miatt így egy színezésből pontosan akkor érhető el az eredeti színezés, ha az a színezés elérhető a $\mathbf{0}^{ext}$ mátrixból. Az is látható, hogy $\mathbf{0}^{ext}$ mátrix rangja $\mathbb{Z}_2$ felett 2, így minden elérhető kiterjesztett mátrix rangja 2. Az utolsó sort és oszlopot elhagyva 0-1- vagy 2-rangú mátrixhoz jutunk. Az alábbi állításhoz szinte nem is kell ez a megállapítás. Egy $\mathbf{A}$ mátrixból pontosan akkor érhető el a szokásos sakktábla-mátrix, ha $\mathbf{A}$ előáll valamely $\mathbf{R}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok összegeként, ahol $\mathbf{R}$ minden sora és $\mathbf{C}$ minden oszlopa csupa 1 vagy csupa 0. Az eredeti kérdés tehát egy ilyen mátrix szép leírását keresi. Mivel $\mathbf{C}$ egyrangú, és a 9. oszlop generálja az oszlopterét, $\mathbf{R}$ pedig minden sort vagy fixen hagy, vagy az ellentettjére változtat, ismét az előző leírásokhoz jutunk. $\square$

Egész más ötleten alapul az alábbi megoldás:

2.7. Algebrai megoldás - Művelet táblák

Legyen most a fekete négyzet a 0 és a fehér négyzet az 1. Az eredeti sakktáblán címkézzünk meg minden sort és oszlopot az első elemével. Legyenek a címkék $o_1, o_2, \dots, o_8, s_1, s_2, \dots, s_8$, melyekre $o_1 = a_{11}, o_2 = a_{12}, s_3 = a_{31}$ stb. Ekkor az (i, j) helyen épp az i -edik sor és j -edik oszlop címkéinek az összege áll, azaz

$$a_{ij} = s_i + o_j (= a_{i1} + a_{1j})$$

Így egy összeadás művelet táblánk van. Amikor egy tündér változtat, akkor egyúttal változtassa meg a sorának vagy oszlopának címkéjét is. Ekkor egyet ad hozzá a sorához (oszlopához) és

$$a_{ij} + 1 = o_j + (s_i + 1)$$

miatt művelet táblából ismét művelet táblát kapunk. Tehát minden elérhető színezés egy művelet tábla.

Visszafelé, induljunk ki egy tetszőleges művelet táblából. Minden tündér érje el, hogy a sorának (oszlopának) első eleme megegyezzen az eredeti színezéssel. A lépések közben végig, így a változtatások végén is művelet táblát

kapunk. Mivel az első sor és oszlop megegyezik az eredetivel, a többi négyzet színének is meg kell egyeznie az eredetivel. Tehát visszakaptuk az eredeti színezést. Ebből látható, hogy pontosan azok a színezések javíthatók meg, amelyeknek ezzel a módszerrel megfeleltethető egy művelettábla. $\square$

3. Alkalmazások

Az előző fejezetben adott megoldások önmagukért beszélnek, és szinte vonzzák a hasonló típusú feladatokat. Egy ilyen feladat következik most. Ez is a Pósa-féle táborból való, ez is megtámadható ugyanazokkal a lineáris algebrai módszerekkel, ám a dimenzió növekedése miatt (sok tündér – nagy gond) az előző feladat „válasza” nem másolható. Kénytelenek vagyunk – a válaszban legalábbis – új fegyverhez, a merőleges altérhez nyúlni.

3.1. 2×2 -es

Pisti kapott egy szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Pisti meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencsére jótündérek siettek a segítségére. Bármely 2×2 -es négyzethez tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy abban a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott 2×2 -es négyzetben minden feketét fehérre, és minden fehéret feketére színez át.

Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktábla színezést?

3.2. Megoldás - 2×2 -es

Egy kis 2×2 -es négyzetet egyértelműen meghatározunk, ha megadjuk a bal felső sarkát. Például, ha a sakktábla bal felső sarkában levő 2×2 -es négyzetről szeretnénk beszélni, akkor mondhatjuk, hogy az az első sor első kis négyzetéhez tartozó 2×2 -es négyzet. Jelöljük t_{ij} -vel az i . sor j . négyzetéhez tartozó 2×2 -es négyzetet. Egy kis 2×2 -es négyzet bal felső sarkát 49 féleképpen választhatjuk ki a sakktábla mezőiből, hiszen ez a sarok nem lehet sem az utolsó sorban, sem az utolsó oszlopban. Így összesen 49 darab tündérünk van. Minden tündérnek megfeleltetünk egy $\mathbf{T}_{ij}$ 8×8 -as mátrixot, amelyben a t_{ij} helyen 1-esek vannak, mindenhol máshol pedig 0-k.

Keressük azokat a mátrixokat, amelyek előállíthatók a $\mathbf{0}$ -mátrixból. Egy $\mathbf{B}$ mátrix elérhető, ha előáll $\mathbf{B} = \sum \lambda_{ij} \mathbf{T}_{ij}$ alakban. Jelölje $\underline{1}$ a csupa 1-esből álló oszlopvektort. $\mathbf{T}_{ij} \cdot \underline{1} = \underline{0}$, hiszen ennek a vektornak minden koordinátája a $\mathbf{T}_{ij}$ mátrixok adott sorában levő 1-esek összege modulo 2. Az előzőből következik, hogy $\mathbf{B} \cdot \underline{1} = \underline{0}$, vagyis hogy minden sorban a számok összege 0 modulo 2. Ugyanez az oszlopokra is elmondható, tehát ott is érvényes az a feltétel, hogy minden oszlopban a számok összege 0 modulo 2. Ez összesen 16 feltétel (minden sorra és minden oszlopra 1), de ezek közül csak 15 független, amit könnyen lehet ellenőrizni Gauss-eliminációval. A 49 tündér is független,

hiszen a bal felső 7×7 -es négyzetet szabadon előállíthatjuk a segítségükkel. Ebből következik, hogy 49 dimenziós az az altér, amit a tündérmátrixok generálnak. De $15 + 49 = 64$, és a generált altér dimenziójának és a feltételek dimenziójának összege mindig a teljes vektortér dimenzióját adja, amiből látszik, hogy nincs is több feltétel. Az eredeti színezésre teljesül a feltétel, így előáll a $\mathbf{0}$ -mátrixból. Így, egy színezésből pontosan akkor áll elő a sakktábla, ha minden sorban és minden oszlopban páros sok 1-es van. $\square$

3.2.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással

Az algebrai megoldás gondolatmenetét követve, az egyes feltételeket megfogalmazhatjuk a sakktáblák szintjén, mellyel eljutunk a középiskolában alkalmazható levezetéshez. Az algebrai megoldás során megállapítottuk, hogy 49 jótündér segíthet a sakktábla helyreállításában. Hasonlóan az első példához, ebben az esetben is $\mathbb{Z}_2$ fölötti lineáris kombinációit kell tekinteni a tündérmátrixoknak. Ebből ismét rögtön látható, hogy a tündérek sorrendje nem számít, valamint feltehető, hogy minden tündér legfeljebb egyszer változtat. Tehát a tündérek segítségével sorban megjavítva a sakktábla mezőit az utolsó sor, illetve oszlop kivételével tetszőleges színezést elő tudunk állítani. Most is, ezzel a módszerrel vagy elérjük a kívánt színezést, vagy azt nem is lehetséges elérni. Ezt azonban igen hosszú feladat lenne papíron végigjátszani. Itt is egy olyan feltételt keresünk, amely segítségével egyszerűen és gyorsan eldönthető, hogy egy adott színezés megjavítható-e.

Az algebrai megoldás során megkaptuk, hogy a $\mathbf{B}$ mátrixoknak megfelelő sakktáblaszínezések a megjavíthatók. A $\mathbf{B}$ mátrixról tudjuk, hogy minden sorában páros sok 1-es van. Ez nem jelent mást, mint hogy a sakktábla minden sorában páros sok fekete négyzet van. Ugyanezt megállapítottuk az oszlopokra is. Tehát azok a sakktáblák lehetnek megjavíthatók, melyek minden sorában és minden oszlopában páros sok fekete mező van. A középiskolai levezetés során ehhez azt kell észrevennünk, hogy amikor egy tündér változtat, akkor egy adott sorban (illetve oszlopban) két mező színét változtatja meg, mely sorban a sorban (illetve oszlopban) a fekete színű négyzetek paritása nem változik.

A kérdés már csak az, hogy minden ilyen sakktábla megjavítható-e. Erre a válasz igen, amit az algebrai bizonyításban a dimenziók segítségével láttunk be. A középiskolai megoldás során azt kell végiggondolni, hogy az eredeti sakktáblából a fent megadott módszerrel bármelyik olyan színezés előállítható, amelyben minden sorban és minden oszlopban páros sok fekete van. Tekintsük a sakktábla egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát). Ebben a sorban (vagy oszlopban) az első hét mező színét be tudjuk állítani a kétszer kettős négyzetek segítségével, ez viszont már meghatározza az utolsó mező

színét a paritás-feltétel miatt. Ha az első hét négyzet közül páros sok fekete, akkor az utolsó fehér lesz, ellenkező esetben pedig fekete.

Ahogy korábban is említettük, az első gondolatmenet nemcsak sakktáblákra, hanem minden más, hasonló hangzású feladatra alkalmazható. Erre példa az alábbi Arany Dániel versenyfeladat.

3.3. Pénzérme

Egy asztalon 2000 darab pénzérme van, mindegyik a "fej" oldalával felfelé fordítva. Egy-egy alkalommal pontosan k darab érmét a másik oldalára fordíthatunk.

Bizonyítsuk be, hogy az adott művelet ismétlésével elérhető bármely adott k szám esetén ($1 \leq k \leq 2000$), hogy a 2000 érme "írás" oldalával felfelé legyen fordítva!

(2000/01. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Haladók-Második forduló-II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók-4.feladat)

Bizonyítás. Legyenek most a $\underline{v}_i$, ($1 \leq k \leq 2000$) bázisvektorok a pénzérmék. Vagyis az i . érmehez hozzárendeljük a $\underline{v}_i$ 2000 dimenziós vektort, amiben 1 darab 1-es van az i . helyen, a többi helyen pedig 0-k szerepelnek. Ekkor $V = \langle \underline{v}_i | v_i \text{ pénzérme} \rangle$ egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti 2000 dimenziós vektortér. Minden állapothoz és minden fordításhoz hozzárendelünk egy vektort. Az érmék egy állapotához

hozzárendeljük az $\underline{a} = \sum_{i=1}^{2000} \lambda_i \underline{v}_i$ állapotvektort, ahol λ_i 0 vagy 1 aszerint, hogy a megfelelő érme a fej vagy az írás oldalával felfelé van-e. Ha megfordítjuk

az $i_1, i_2, \dots, i_k$ érmeiket, az az állapotvektorhoz hozzáadja a $\sum_{j=1}^k \underline{v}_{i_j}$ vektort.

Például, ha az első k darab érmét megfordítjuk, akkor az állapotvektorhoz azt a vektort adjuk hozzá, amelyben az első k koordináta 1, a többi pedig 0. Így a felfordítások egy $\binom{2000}{k}$ vektor által generált W altér elemei. A kérdés pedig azzal ekvivalens, hogy ebben az altérben benne van-e a csupa 1

vektor, azaz $\underline{1} = \sum_{i=1}^{2000} \underline{v}_i$. Érdemes itt megjegyezni, hogy a fentieknek nagyobb a füstje mint a lángja. Aki olvasta a dolgozat elejét, annak ez már egy adott eszköztár.

Tekintsünk most 2 vektort, $\underline{v}_t$ -t és $\underline{v}_s$ -et, $t \neq s$ és $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ t -től és s -től különböző számok. A $\underline{v}_t$ vektorban a t . helyen, $\underline{v}_s$ -ben pedig az s . helyen 1-es van, a többi helyen pedig 0-k. Ekkor a $\underline{v}_t + \sum_{j=1}^{k-1} \underline{v}_{i_j}$ és $\underline{v}_s + \sum_{j=1}^{k-1} \underline{v}_{i_j}$ generátorok különbsége (ami ugyanaz, mint az összege) $\underline{v}_t - \underline{v}_s (= \underline{v}_t + \underline{v}_s)$. Keressük $W^\perp$ -et. Ha egy vektor merőleges $\underline{v}_t - \underline{v}_s$ -re, akkor annak a t -edik és

s -edik koordinátája megegyezik. Ez minden t, s párra igaz, így a szóba jövő vektorok $\underline{1}$ és $\underline{0}$. Mivel mindkettő merőleges az $\underline{1}$ vektorra, a csupa 1 mindig benne van W -ben.

□

3.4. Készítsünk középiskolai megoldást

Az algebrai megoldásból tudjuk, hogy az előállítható vektorok vagy 2000 vagy 1999 dimenziós alteret alkotnak, attól függően, hogy k páratlan vagy páros. Mindkét esetben előállítható az összes olyan vektor, amelyekben két nemnulla (azaz 1-es) koordináta van. Középiskolai nyelven ezt úgy lehetne igazolni, hogy válasszunk ki két tetszőleges pénzérmét, majd $k-1$ darab tőlük különbözőt. Először fordítsuk meg az egyik érménket a $k-1$ utóbbival, majd a $k-1$ -et fordítjuk a másik érménkel. Ekkor pontosan a két kiválasztott érme változott fejről írássá, vagy fordítva. Mostantól fogva tetszőleges két érmét meg tudunk fordítani. Párosítsuk az érméket, majd fordítsuk meg őket kettesével, így 1000 lépésben minden pénzérme „írás” lesz.

4. Egy új feladat

4.1. A herceg és a tetrisz

Az alapfeladat elsősorban a felnőtt olvasónak szól. Az ötletet, természetesen, az előző feladatok megoldási módszerei és a már jólismert szokásos történet adta.

1. Julcsi kapott egy szép sakktáblát karácsonyra. De ő, mint minden korabeli lány, sakktábla helyett inkább azt szerette volna, hogy a herceg jöjjön fehér lovon. Persze, mint ahogy az lenni ilyenkor szokott, most is csak a ló jött. Ráadásul a gonosz boszorkány megváltoztatta a sakktábla színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Julcsi ekkor nagyon elszomorodott, ám a ló a segítségére sietett. Különleges képessége az, hogy a sakktáblán bármely ló alakzatban a színezést az ellentettjére tudja változtatni, vagyis abban az alakzatban minden fekete mezőt fehérre, és minden fehér mezőt feketére tud átszínezni.

Vissza tudja-e állítani a ló az eredeti sakktábla színezést?

Ez az életszagú feladat adta az ötletet a következő feladatokhoz, amelyek már középiskolás ésszel is fölfoghatók.

- 2.a Julcsi kapott egy szép sakktáblát. A gonosz boszorkány megváltoztatta a sakktábla színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Julcsi ekkor nagyon elszomorodott, ám segítségül hívta a tetrisz figurákat. Különleges képességük, hogy a sakktáblán bármely tetrisz alakzatban a színezést az ellentettjére tudják változtatni, vagyis abban az alakzatban minden fekete mezőt fehérre, és minden fehér mezőt feketére tudnak átszínezni.

Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés?

- 2.b. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha elvész a **T** alakú figura?
- 2.c. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha megkerül a **T** alakú figura, de elvész a többi?
- 2.d. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha csak a ló van?

4.1.1. Algebrai megoldás - a régi ötlet

Az utolsó 4 feladat láthatóan szorosan kapcsolódik egymáshoz. Nemcsak a megfogalmazásban, de erről ebben a dolgozatban nem írunk többet.

A bizonyítási technikák megegyeznek az előző feladat első, illetve második megoldásával. Új ötlet szemmel láthatóan nem kell hozzájuk. A legnagyobb különbség az előző feladatokhoz képest a hatalmas méretű generátorrendszer. Könnyű megszámolni, hogy „lóból” 336, **T** alakú figurából 168 helyezhető el a szokásos sakktáblán. Ugyanis a ló nyolcféle pozíciót vehet fel, a **T** alakú figura négyfelét és egy tetszőlegesen választott mezőjük $6 \times 7 = 42$ helyre rakható. Ezért a válasz is a merőleges alterek nyelvén várható.

A megoldásokat itt azért sem áruljuk el, hogy a feladatokat bárki feladhassa akár saját magának, pusztán szórakozásból, akár egy érdeklődőbb társaságnak. A szerzők felvetették a kérdéseket az ELTE Algebra Szemináriumán, ahol a jelenlévők sokáig elszórakoztak a különböző megoldásokkal és számos megjegyzést fűztek hozzájuk. Szinte hihetetlen, hogy hány különböző megoldás adható egy ilyen feladatra.

4.2. További feladatok

4.2.1. Százszög

Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármásra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcs-hoz az 1-es szám tartozzon?

(1997/98. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Haladók-Első forduló-I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók-5.feladat)

4.2.2. Megoldás

Ebben a feladatban a csúcsok játsszák a bázisvektorok szerepét: a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ vektorok generálják a V vektorteret. Írjunk a -1 -es csúcsok helyére 0 -kat. Egy $0 - 1$ jelöléssorozattal egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti vektort jelölünk, amely a $\underline{v}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként áll elő. Ebben egy csúcs-vektor együtt-hatója 0 , ha a csúcs 0 -ás, és 1 , ha 1 -es. Most vizsgáljuk meg, mi történik, amikor megváltoztatjuk a számokat. Ekkor 3 egymást követő koordináta

megváltozik. Vagyis egy $\underline{a}_i = \underline{v}_i + \underline{v}_{i+1} + \underline{v}_{i+2}$ alakú vektor adódik az eredeti színezés vektorához. Az első kérdést a következőképpen fogalmazhatjuk: tetszőleges $\underline{w} \in V$ vektorból előállítható-e egy olyan vektor, aminek a koordinátái között 50 db 1-es és 50 db 0-as szerepel? Vegyük észre, hogy az $\underline{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, 98$ vektorok lineárisan függetlenek. Így az $\underline{a}_i$ -k által generált altér legalább 98 dimenziós. Keressük $\dim\langle \underline{a}_i | 1 \leq i \leq 100 \rangle$ értékét. Ha ez 100, akkor az $\underline{a}_i$ -k az egész vektorteret generálják, vagyis bármilyen $\sum \lambda_i \underline{v}_i$ előállítható, ha pedig kevesebb, mint 100, akkor nem generálják az egész vektorteret, és így nem állítható elő minden. Számoljuk ki annak a 100×100 -as mátrixnak a determinánsát, amelynek koordinátái az $\underline{a}_i$ -k. Ha a determináns 0, akkor a 100 vektor nem lineárisan független, ha pedig nem 0, akkor a 100 vektor független, és az egész vektorteret generálják. A 100×100 -as mátrix egy ciklikus mátrix. A determinánsa

$$(3) \quad \prod_{\varepsilon^{100}=1} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 3 \cdot \prod_{\substack{\varepsilon^{100}=1 \\ \varepsilon \neq 1}} \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = 3$$

ahol az ε -ok a 100. egységgyökök, és $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)$ a mátrix sajátértéke. Az utolsó egyenlőség abból adódik, hogy a 3 és a 100 relatív prímek, és így minden egységgyök pontosan egyszer szerepel a számlálóban és a nevezőben is. A determináns nem nulla mod 2, ezért a 100 vektor lineárisan független, és így generálják a teljes vektorteret. Tehát minden lehetséges jelöléssorozat előállítható. $\square$

4.2.3. Középiskolai megoldás

A középiskolában a determinánsokkal nem megyünk sokra. Így annak a tudatában kell elkészítenünk a megoldást, hogy minden helyzet minden helyzetből elérhető. Az *a)* rész középiskolai megoldásának alapötlete, hogy a 100 darab csúcshoz írt szám 25 darab egymást követő, közös elem nélküli számnégyesre tagolható és legfeljebb két lépésben bármely számnégyes számainak összege 0-vá tehető. Így pedig nyilvánvaló, hogy a 25 számnégyes összege is 0-vá tehető. A *b)* rész megoldásakor a csúcsokat 1-től 100-ig számozzuk. Első lépésben elérjük, hogy az első 98 csúcshoz írt szám 1-es legyen. Ekkor az utolsó 2 csúcs számozása négy féle lehet. Minden esetben könnyű belátni, hogy egyszerű alakítgatásokkal elérhető a csupa 1-es. $\square$

A fenti gondolatmenet egyfajta duális problémát sugall. A (3) értéke akkor lesz 0, ha a mátrix determinánsa 0, azaz ha $3|k$, ahol k a csúcsok száma. Ráadásul könnyű meggondolni, hogy ha $k \equiv 2(3)$, akkor a konstrukciók sokkal egyszerűbbek. Így a feladatot érdemes több sokszögre feladni:

4.2.4. K - szög

Egy szabályos k -szög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy 0-t írunk. Egy "lépésben" bármely három egymást követő csúcshoz írt számot az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; 0 hármaszt a 0; 0; 1 hármasra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen "lépésekkel" a csupa 0-ból, hogy a csúcsokhoz írt szám mindegyike egy kivételével 0 legyen, ha

(i) $k = 100$

(ii) $k = 101$

(iii) $k = 102$?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy egy kivételével mindegyik csúcshoz a 0 szám tartozzon, ha

(i) $k = 100$

(ii) $k = 101$

(iii) $k = 102$?

5. Művelet táblák

5.1. 1996

Egy 1996×1996 -os négyzetbe beírtuk 1-től 1996^2 -ig a természetes számokat egymás után úgy, hogy először az első sorban balról jobbra írtuk őket, majd a második sorban is balról jobbra írtuk őket és így tovább. Válasszunk ki a beírt számok közül 1996-ot úgy, hogy mindegyik más oszlopból és más sorból való legyen! Ezeknek a számoknak az összege hány különböző értéket adhat?

(1995/96. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Kezdők-Második forduló-Speciális tantervű gimnáziumok-2. feladat)

Bizonyítás. A feladat megoldása pofonegyszerű: a táblázatunk nem más, mint az egész számok összeadás táblájának egy része. Megkapható például úgy is, hogy tekintjük a $0, 1, \dots, 1995$. sorok és az $1, 2, \dots, 1996$. oszlopok metszeteiből képzett táblázatot. Ha egy Abel-csoport hasonló részmátrixát vesszük, azaz az $a_1, a_2, \dots, a_k$ -adik és a $b_1, b_2, \dots, b_k$ -adik oszlopok metszetét, akkor az (i, j) -helyen $a_i + b_j$ áll. Ha minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk ki, akkor minden a_i és minden b_j egy tagban fog szerepelni. Az összeadás kommutativitása miatt ezen elemek összege megegyezik az a_i -k és b_j -k összegével, azaz állandó. $\square$

Ennél a megoldásnál is el szeretné dönteni az ember, hogy milyen más típusú feladathoz használható fel. Ha a megoldást szó szerint szeretnénk átvinni, akkor olyan négyzetes táblázatokat – mátrixokat – kell keresnünk, amelyekre teljesül, hogy akárhogy veszünk ki minden sorból és minden oszlopból egy elemet, az így kapott összeg mindig ugyanannyi.

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & a_{it} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{kj} & \cdot & \cdot & a_{kt} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Ha egy ilyen kiválasztásban szerepelnek például az a_{ij} és a_{kt} elemek, akkor az kicserélhető a_{it} és a_{kj} elempárra. Azaz, az összeg állandósága miatt $a_{ij} + a_{kt} = a_{it} + a_{kj}$ kell, hogy teljesüljön, azaz

$$a_{ij} - a_{kj} = a_{it} - a_{kt}$$

igaz tetszőleges i, j, k, t különböző számnégyes esetén. Ha k helyébe 1-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy az első sort kivonva az összes többiből olyan

mátrixot kapunk, amelynek az első sor kivételével minden sora állandó. Ez, ahogy az eredeti feladatban is, azzal ekvivalens, hogy

$$a_{ij} = a_{i1} + (a_{1j} - a_{11}),$$

azaz minden elem előáll a neki megfelelő oszlophoz és sorhoz rendelt számok összegeként. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az egész számok összeadásának egy résztáblázatával van dolgunk. Ha kevésbé mesterkélts feladatot szeretnénk feladni, akkor a másik kommutatív kétváltozós művelethez, a szorzáshoz kell fordulnunk.

5.2. Egy új feladat

Jancsi gyakorlás közben felírta a sakktábla mezőire a szorzótáblát 8-ig. Ezután elhelyezett a sakktáblán 8 bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást. Mennyi lehet a bástyákkal fedett mezőkre írt számok szorzata?

Bizonyítás. A megoldás az előzőek mintája alapján: minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk ki, így minden szám 1-től 8-ig pontosan egyszer szerepel mint egy fedett mezőn lévő szám első, illetve második tényezője. A szorzat tehát állandó, $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2$

□

Vélemény

Ha tudom miről van szó - algebrai feladatok a középiskolában
című TDK dolgozatáról.

dolgozata egy érdekes hiányt vet fel és pótol az egyetemi tanárszakos algebra oktatásban. Középiskolai feladatok absztrakt algebrai megközelítését, megoldását és hasonló feladatok kitalálását tűzték ki célul.

A dolgozatban egy tipikusan nehéznek számító, Pósa Lajos legendás középiskolai tehetséggondozó szakkörén elhangzott problémát vizsgálunk. A kétféle középiskolai megoldás a Pósa-féle hagyományos felépítésen alapul, lépésről lépésre visz közelebb a megoldáshoz, számos ötletet és „észrevételt” igényelve. A dolgozatban ezután 4 különböző algebrai megoldás következik, az első három egyre kisebb absztrakciós fokot igényelve, egyre inkább kihasználva a feladatok által adott megszorításokat. A megoldások egyúttal utat mutatnak hasonló feladatok megoldásához és készítéséhez. Az első megoldás jelentős absztrakciót igényel, az ott elmagyarázott technika minden hasonló feladatot kezel. Cserébe néha kicsit időigényes, de mindenképpen mechanikus, új ötletet már nem igénylő, konstruktív módszert ad a kezünkbe. A második megoldás bármilyen sakktábla színezéses feladatot kezel, ez már kicsit egyszerűbben, a mátrixok segítségével oldja meg a feladatot. A harmadik pedig valójában csak ezt az egy problémát oldja meg – teljesen elemi módon, a mátrixok rangjának szinte csak a definícióját használva. Nagy érdeme a dolgozatnak, hogy nincsenek benne elméleti fejtegetések vagy fölösleges elmélkedések. A szerzők célirányosan, gyakorlatiasan vetik fel a problémákat és adják meg a megoldásukat. A dolgozatban felhasznált módszereket minden matematikát tanuló hallgató ismerheti, ezek részei minden bevezető lineáris algebra kurzusnak. Dícsérendő – és számomra különösen rokonszenves – mozzanata a dolgozatnak, amikor az egyik (lineáris) algebrai megoldás és az „elemi” (középiskolás) módszerrel történő megoldások kapcsolatát vizsgálja. (Emlékszem, egykori egyetemi tanulmányaim során milyen élmény volt az Erdős – de Bruijn-tétel algebrai és leszámolás kombinatorikai bizonyítását megismerni külön-külön, de az igazi megértéshez a kétféle típusú megközelítés együttese, egymással való kapcsolata segített.) A megoldások frappánsak, érthetőek és jól kidolgozottak, **azokat egy az egyben el fogom mondani másodéves hallgatóknak (az algebra 2 haladó tárgy keretében).** A dolgozatból 3 feladat szerepelt már az idén is a matematikatanári-szakirány reguláris algebra kurzusán.

Összefoglalva, nagyon alaposan kidolgozott, színvonalas megoldásokkal teli, a gyakorlatban is használható egyetemi-módszertani dolgozatról van szó. A kiindulási ötlet, a két oktatási szint közti közvetlen kapcsolat megteremtése eredeti megközelítés.



Dr. Hermann Péter
egyetemi docens, tárgyfelelős
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

AJÁNLÁS

Ha tudom, hogy miről van szó --- Iskolai feladatok absztrakt algebrai háttérrel

című dolgozatához

Örömmel olvastam ezt az ötletes és szép munkát. Valós probléma adja a dolgozat háttérét, és a benne javasolt megoldás, amelyet jól kiválasztott példák érzékeltetnek, megszívlelendő. A mai hallgatók számára, és különösen igaz ez a tanárszakosok esetében, nap mint nap igazolnia kell a felsőoktatásnak, hogy a megszerzendő végzettségük és a leendő munkájuk szempontjából fontos és jól alkalmazható az a tudás, amit a felsőoktatás nyújt számukra. Természetesen nem minden egyetemi tantárgy esetében egyszerű ezt az igényt kielégíteni, de ez a dolgozat kitűnően illusztrálja azt, hogy a bevezető lineáris és absztrakt algebrai ismeretek segíthetik a tanár munkáját: ezek „bevetésével” megoldhat versenyszintű feladatokat, és e megoldások alapján már könnyebben megtalálhatja az „iskolai szintű” megoldást; sőt, saját maga is új feladatokat alkothat. Egyúttal jó példával szolgál a leendő tanárok számára abban is, hogy nekik is ily módon kellene átadniuk a matematikai ismereteket a diákjaiknak.

Az újra induló egységes tanárképzés lehetővé teszi, hogy ezeket a speciális igényeket előtérbe helyezzük az egyetemi oktatás során. Magam is tervezem, hogy a dolgozat ötleteit, példáit kiprobálom majd a tanárképzésben.

Szeged, 2013. jan. 8.



Dr. Szendrei Mária (Bálintné)

tanszékvezető egyetemi tanár

SZTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Vélemény

Ha tudom miről van szó - algebrai feladatok a középiskolában

című TDK dolgozatáról.

A matematika tanár szakos hallgatók főleg a tanulmányaik elején gyakran kérdezik tanáraiktól, hogy miért kell ezt megtanulni, hol fogjuk ezt használni, stb. Többségük azt hiszi, ahhoz hogy egy matematika tanár jól végezze a munkáját, nem szükséges a felsőfokú matematika ismerete. Elég, ha a középfokú tananyagot tudják viszonylag nagy biztonsággal. Ebben a hiszemben nem veszik elég komolyan a munkájukat. Megelégszenek a gyengébb érdemjegyekkel. Az ilyen hozzáállással tanári oklevelet kapó hallgatók valószínűleg nem lesznek jó tanárok. Mindezek indokolják, hogy az oktatás során ne csak az új anyag megtanítására figyeljünk, hanem folyamatosan oldjunk meg olyan problémákat, melyek arról győzik meg a hallgatókat, hogy igenis szükségük van azokra az ismeretekre, mert felhasználhatók a tanításban. Sajnos az oktatási segédanyagok nem tartalmaznak elegendő e célnak megfelelő feladatot.

Mindezek miatt öröndetes témaválasztása. A dolgozat első részében egy érdekes sakktábla színezési problémára adnak két középiskolában is elmondható megoldást, majd további megoldásokat az egyetemen tanult alapvető lineáris algebrai eszközökkel. Arra is rávilágítanak, hogy mi a kapcsolat az elemi és a lineáris algebra eszközeit használó megoldások között. A második részben további érdekes feladatokat fogalmaznak meg, és oldanak meg alapvető lineáris algebrai és absztrakt algebrai eszközökkel. Közülük többnek a kitalálásához és a megoldásához az első részben használt lineáris algebrai módszerek adják az ötletet.

A dolgozat mintaszerűen van megírva. A feladatok kiválasztásával, és azok különböző módszerekkel való megoldásával meggyőzik az olvasót, hogy az egyetemen tanult felsőfokú ismeretek igenis segítik a matematika tanárt a középiskolai tananyag oktatásában, érdekes feladatok kitalálásában és a mélyebb összefüggések felderítésében. A következő tanévtől kezdve igyekszem beépíteni a dolgozat több feladatának tárgyalását is a reguláris lineáris algebra kurzusomba.

Dr. Szabó László
egyetemi docens
SZTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Vélemény

Ha tudom miről van szó - algebrai feladatok a középiskolában

című TDK dolgozatáról.

A matematikatanárok képzése során a hallgatókban rendszeresen felmerül a kérdés, hogy bizonyos témaköröket miért kell tanulniuk, hiszen azokat a középiskolában sosem fogják tanítani, sosem fognak azzal kapcsolatos kérdések felmerülni. Természetesen több oka is van annak, amiért ezeket a „felsőbb” matematikai témákat szükséges oktatni a leendő tanárok számára. Ezek közül az egyik az, hogy elemi, középiskolában is felmerülő, a tananyagba beépíthető feladatok esetén is előfordulhat, hogy nem középiskolás ismeretekkel nagyobb rálátásunk lesz az adott témakörre, a gyerekek által felvetett kérdésekre könnyebben tudunk válaszolni, illetve jobban meg tudjuk ítélni, hogy milyen eséllyel vágnak neki az általuk feltett kérdés megoldásának.

A tanárszakos hallgatók számára a fenti absztrakt érvelés nem feltétlenül ér célba, ezért nagyon fontos, hogy ezt konkrét példákkal támasszuk alá.

dolgozata éppen egy ilyen témát jár körül.

A dolgozatban tárgyalt feladatok szerepelnek az általam oktatott *Hogyan foglalkozzunk tehetséges gyerekekkel?* című tárgy anyagában. A tárgy a Pósa Lajos hétvégi táboraiban alkalmazott módszert, feladatanyagot kívánja feldolgozni. A két félév során széles életkori spektrumon végighaladva tekintünk át feladatokat, amelyeket tehetséges gyerekekkel való foglalkozás során használhatnak a tanárok. Ebben a szituációban rendszeresen előfordul, hogy a középiskolás tananyagot meghaladó matematikai ismeretek nagyban hozzájárulnak ahhoz, hogy megfelelő sorrendben, megfelelő pillanatban adja fel a tanár a feladatokat.

A dolgozatban tárgyalt feladatokat hétvégi táborokban és az egyetemi óráimon is hosszú évek óta feladom. *Ennek ellenére számomra újdonság erejével hatott a lineáris algebrai megközelítés.* Korábban ezen a szemüvegen át nem néztem ezeket a problémákat. Nagyon értékesnek tartom, hogy a szerzők felfedezték ezt az aspektust és ennek alapján más szemszögből vizsgálták a feladatokat. Mostantól az egyetemi kurzuson mindenképpen meg fogom beszélni ezt a megközelítést is a diákokkal.

Nagyon fontosnak tartom, hogy az új nézőpont új, érdekes, izgalmas kérdéseket szült, amelyek feladhatók a gyerekek számára is. Az órámon próbálom a hallgatókat a jó kérdésfeltevésre nevelni, ami nem könnyű feladat. Itt azonban örömmel látom, hogy ez a szempont is nagyszerűen érvényesült, izgalmas kérdésekkel (és a rájuk adott válaszokkal) gazdagodott a témakör.

Összefoglalva, egy színvonalas, izgalmas, eredeti megközelítést alkalmazó módszertani dolgozat írt. Rendkívül fontos adalékot adnak ahhoz, hogy miért érdemes a középiskolai tanároknak a középiskolában általában nem használt matematikai területekről is mélyebb ismereteket szerezni.

Budapest, 2012. december 21.

Juhász Péter

tudományos munkatárs, tárgyfelelős
ELTE Számítógéptudományi Tanszék

Vélemény

Ha tudom miről van szó – algebrai feladatok a középiskolában
címmű TDK dolgozatáról

Tudományos diákköri dolgozata napjaink oktatásának egy igen fontos kérdését feszegeti. Nevezetesen, hogy a tanárszakos hallgatók az egyetemen hallgatott felsőbb matematikát milyen konkrét módokon tudják felhasználni a későbbiekben a középiskolás diákok tanításához. Ez minden bizonnyal a tanárszakos hallgatók oktatásának egyik legnagyobb kihívása.

A dolgozat első feladata Pósa Lajos táborainak egyik alapvető része: egy sakktáblaszínezési feladat. A dolgozat először részletezi a feladat középiskolásoknak szánt (korántsem nyilvánvaló) megoldását, majd bemutat négy különböző, alapvető lineáris algebrai eszközöket használó megoldást. Ezen megoldások külön-külön és együtt is a diákoknak szánt megoldást mélyítik el. Nekem személy szerint a harmadik megoldás nyerte el leginkább a tetszésemet, melyben egy ügyes trükkkel a sakktábla színezést leíró mátrixnak a rangjára kapunk egyszerű, könnyen kezelhető feltételt. Korábban diákként és segítőként is részt vettem Pósa Lajos táboráiban, és úgy látom, hogy a dolgozatban közölt megoldások hasznos kiegészítői lehetnek a tábori segítő „arszenáljának”. A későbbiekben a szerzők további Arany Dániel versenyfeladatokat, és azok lineáris algebrai alapuló megoldását közlik. Ezek közül már vannak komolyabb apparátust igénylő feladatok is, például a 3.5-ös fejezetben szereplő százszöges feladat. A közölt lineáris algebrai megoldás frappáns és egyszerű, remek lehetőséget ad középiskolai megoldásra való „átfordításra”.

Véleményem szerint a dolgozat egyik legnagyobb érdeme, hogy több feladat kapcsán is elemzi a középiskolai megoldás és a lineáris algebrai alapú megoldás közötti kapcsolatot. A szerzők ezzel nem csak arra adnak konkrét példákat, hogy a tanárok miként tudják elmélyíteni a megoldásokat felsőbb matematikai ismereteik segítségével, de azt is bemutatják, hogyan tudnak ezen ismeretek segítségével újabb, középiskolások számára is érthető, élvezhető és megoldható feladatokat készíteni.

Összefoglalva: a dolgozat kiváló érzékkel tapint rá olyan érdekes középiskolai feladatokra, melyek megoldásához – és mélyebb háttérének megértéséhez – az egyetemen hallgatott lineáris algebrai ismereteket érdemes segítségül hívni. A közölt megoldások ötletek és frappánsak, minimális lineáris algebrai alapismereteken túl más előismeretet nem igényelnek, mégis ügyesen megvilágítják a problémák és megoldásaik absztrakt hátterét. A dolgozatban közölt feladatokat és megoldásaikat érdemesnek tartom a matematika tanárszakos hallgatók egyetemi oktatásának tantervébe bevenni.



Dr. Horváth Gábor

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet
Algebra Kutatócsoport vezetője



professzor mint témavezető kérésére néztem át

„Ha tudom, hogy miről van szó – iskolai feladatok absztrakt algebrai háttéréről”
című TDK dolgozatát. Így nem hivatalosan összegezném néhány sorban az észrevételeimet:

Saját tapasztalataim szerint is a matematika tanárszakos hallgatók gyakran felvetik, hogy a leadott tananyagot vajon mennyire tudják használni később a tanítás során.

A dolgozat számukra is bizonyítékul szolgálhat arra, hogy a lineáris és absztrakt algebrai alapfogalmak és összefüggések felhasználása eszköz lehet a középiskolai szakkörökön és versenyeken szereplő feladatok megoldására. Az algebrai háttér vizsgálata lehetőséget ad feladattípusok jobb átláthatóságára és új megoldások keresésére. Mindezeket a szerzők számos feladat mind középiskolai, mind pedig absztrakt algebrai módszerrel történő megoldásával igazolják.

A dolgozat szépen felépített, alapos munka.

Dr. Csörgő Piroska

egyetemi tanár

Eszterházy Károly Főiskola

Matematikai és Informatikai Intézet

E.K.F. Matematikai és Informatikai Intézet

Postacím: 3300 Eger, Leányka u. 4.

Tel.: 06-36/520-478; <http://matinf.ektf.hu>

Hivatkozások

- [1] Babai, L., P. Frankl; Linear Algebra Methods in Combinatorics, (With Applications to Geometry and Computer Science) manuscript 1992, 206 pp
- [2] Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes; Absztrakt algebrai feladatok, Tankönyvkiadó, 1985, 1988, JATE Press, 1993, 1998, Polygon, 2005.
- [3] Csákány Béla; Algebra, Tankönyvkiadó, 1973, 1977, 1995.
- [4] Freud R. Gyarmati E.; Lineáris algebra, Második kiadás Typotex, 2006 518 pp. ISBN 9634634710
- [5] Fried Ervin; Általános algebra, Tankönyvkiadó, 1981.
- [6] Fried Ervin; Algebra I,II, Tankönyvkiadó, 2000, 2002.
- [7] Fried Ervin; Algebra, Tankönyvkiadó, 1963, 1966, 1978, 1980, 1992, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996, 1997.
- [8] Gaál István és Kozma László; Lineáris algebra, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2004.
- [9] Griffel, D. H.; Linear algebra and its applications. Vol. 1. A first course. Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press (John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1989. xiv+289 pp. ISBN: 0-85312-946-0
- [10] Griffel, D. H.; Linear algebra and its applications. Vol. 2. More advanced. Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press (John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1989. x+223 pp. ISBN: 0-470-21354-X
- [11] Halmos, P.R.; Véges dimenziós vektorterek, Műszaki Könyvkiadó, 1984
- [12] Kiss Emil; Bevezetés az algebrába, Második kiadás Typotex, 2007 716 pp. ISBN 978-963-2791-13-5
- [13] Klukovits Lajos; Klasszikus és lineáris algebra, Polygon, 1999.
- [14] Kovács Zoltán; Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz, Kossuth Egyetemi Kiadó, 1998.

- [15] Lax Peter D.; Lineáris algebra és alkalmazásai, Akadémiai Kiadó, 2008. 396 pp. ISBN: 978 963 05 8632 0 2008
- [16] Lax, Peter D.; Linear algebra and its applications. Enlarged second edition. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2007. xvi+376 pp. ISBN: 978-0-471-75156-4
- [17] Lidl, R., G. Pilz; Applied abstract algebra, Springer-Verlag, New York, 1984. xviii+545 pp. ISBN: 0-387-96035
- [18] Prasolov, V. V.; Problems and theorems in linear algebra. Translated from the Russian manuscript by D. A. Leites. Translations of Mathematical Monographs, 134. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. xviii+225 pp. ISBN: 0-8218-0236-4
- [19] Prasolov, V. V.; Lineáris Algebra Typotex 2001. ISBN 978-963-9548-51-0
- [20] Rózsa Pál; Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, 1974
- [21] Schmidt Tamás; Algebra, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1993.
- [22] Stiefel, Eduard L.; Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications. Four lectures on solving linear equations and determining eigenvalues. National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1955. 52 pp.
- [23] Strang, Gilbert; Linear algebra and its applications. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976. xi+374 pp.
- [24] Szabó László; Lineáris algebra, Polygon Jegyzettár, 2006.