Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Pártos Boglárka

NUMB3RS a középiskolában

TDK

Témavezető:
Szabó Csaba

Budapest, 2011.

1. Bevezetés, célkitűzés

1.1. Dolgozatom célja

"Bármit tanítunk, tanítsuk úgy, mint előttünk lévő dolgot, melynek biztos haszna van. Tudniillik kell, hogy lássa a diák, hogy mindaz amit tanul, nem utópia vagy a platóni ideák világából való, hanem ezek minket körülvevő igazi dolgok, melyeknek helyes ismerete az életnek valódi hasznára van. Így a szellem buzgóbban kezd majd hozzá és helyesen különböztet meg." Comenius [6]

Általános megfigyelés, hogy a matematika szó hallatára a legtöbb embert kirázza a hideg, csodálkoznak, és felnéznek arra az emberre, aki matematikával foglalkozik, vagy az iskolában szerette a matekot. Véleményem szerint ez a rossz hozzáállás főként a meg nem értésből származó kudarcélményekből fakad, hiszen senki sem szereti azt csinálni amit nem ért, főleg ha nem látja értelmét, gyakorlati hasznát. A matematikaórán előforduló feladatokon, problémákon gyakran nem látszik gyakorlati hasznuk, így ezek nem jelentenek motivációt azoknak a gyerekeknek, akiknek több időre, elmélyedésre lenne szükségük egyes módszerek elsajátítására.

Fontosnak tartom, hogy a különösebb tehetséggel nem rendelkező gyerekek, akik talán lassabban, vagy kevésbé értik meg a bonyolultnak tűnő matematikai képleteket, gondolkodásmódot, ne úgy nézzenek a matekra, ahogyan Somfai is írja [20]-ben, mint valami felsőbb tudásra, amit csak a beavatottak értenek meg, hanem egy számukra is megérthető, érdekes, szép és hasznos tárgyra.

Dolgozatommal célom tehát a matematika iránti érdeklődés felkeltése, a megértésre való törekvés elindítása. Kiváló lehetőséget biztosít erre egy olyan tévésorozat, amely elsősorban szórakoztat, kikapcsolódást nyújt, és emelett tanít, népszerüsíti a matematikát. Ezért választottam dolgozatom témájául a Gyilkos számokat.

1.2. A Gyilkos számokról

A Gyilkos számok, eredeti címén Numb3rs egy világszerte ismert amerikai krimisorozat. Az Egyesült Államokban 2005-től 2010-ig futott a CBS csatornán az American Broadcast Company [1] felmérése szerint átlagosan 10 millió fős nézettséggel. Magyarországon a TV2-n láthatjuk 2006 óta. Hat évada készült el, 118 résszel.

Főszereplői Don Eppes FBI-ügynök, és matematika-zseni öccse, Charlie. Don csapatának minden részben egy-egy újabb bűnügyet kell megoldania, melyben nagy segítségükre van Charlie, aki matematikai modellek felállításával oldja meg az eseteket. A matematika számos területét mutatja így be. Előkerülnek például a valószínűségszámítás, játékelmélet témaköre mellett differenciálegyenletek, geometriai és gráfelméleti problémák is. Segítségükre van még a kissé hóbortos fizikaprofesszor, Charlie jó barátja, Larry Fleinhart, és Charlie egyik tanítványa, Amita Ramanujan is. A testvérpár mindennapjait általában három szinten figyelhetjük meg, az FBI-nál, a bűnügy nyomozása közben; Charlie munkahelyén, a kitalált Californian Institute of Sciencen; illetve a családban, édesapjukkal, a mérnök Alannel. Mindhárom helyen gyakori téma a matematika.

A sorozat számos díjat nyert, például 2006-ban a Carl Sagan Award for Public Understanding of Science, majd 2007-ben a National Science Board úgynevezett Public Service díját. [2]

A matematikai részek kidolgozásához több matematikus is segíti a forgatókönyvírók munkáját, matematikailag korrekt minden amit a táblára írnak [7], [8] szerint is. Az Egyesült Államokban többen is foglalkoznak a sorozatban szereplő matematikai tartalom részenkénti feldolgozásával, bemutatásával, viszont ezek gyakran hiányosak, vagy adott esetben nem arról szólnak ami a konkrét részben ténylegesen szerepelt [3], [4].

"Minden nap használjuk a matematikát. Megjósoljuk az időjárást, mérjük az időt, kezeljük a pénzünket. A matematika több mint képletek és egyenletek. Ez tiszta logika, racionalitás. Az emberi elme a legnagyobb rejtélyeket oldja meg a segítségével." – Már a bevezetőben, minden rész elején a matematika gyakorlati alkalmazásaira, hasznosságára hívják fel a figyelmünket. Pontosan azt a sztereotípiát cáfolja meg, ami a legtöbb emberben riasztó képként él a matematikáról, hogy ez a tudomány nem más mint bonyolult képletek és egyenletek összessége.

Munkám során először azt vizsgálom, hogy a sorozat milyen képet állít a matematikáról, a matematikusokról, hiszen ez is nagyban befolyásolja a néző hozzáállását a konkrét matematikai tartalomhoz. Szimpatikus szereplőgárda, izgalmas történet sokkal inkább felkelti az érdeklődést a matematikai mondanivaló iránt is. Ezt követően egy konkrét részben bemutatott témakört dolgozunk fel, a gráfelmélet egy híres problémakörét, a Steiner-fákat, melyek nemcsak hogy jelentős gyakorlati alkalmazásokkal bírnak, érdekesek is, és alapjaik a középiskolában is bemutathatók. Mindenekelőtt azonban felmerül a kérdés, hogy miért is fontos matematikát tanulni, megértetni és megszerettetni a diákokkal.

1.3. A matematikatanítás fontossága

Ahogyan Somfai is írja [20]-ban, a jó módszerű matematikatanítás kialakításának fontossága megkérdőjelezhetetlen. Az élet minden területén szükségünk van arra, hogy gondolatainkat rendezetten, logikusan legyünk képesek interpretálni, érvelni tudjunk álláspontunk mellett, vitában képesek legyünk rugalmas, a másik álláspontját mérlegelő magatartásra. "Mindezeknek a képességeknek a kialakításához és fejlesztéséhez a tantárgyak közül talán az egyik legnagyobb hatásfokkal járulhat hozzá a jó módszerű matematikatanítás."

Az iskolai matematikaoktatás célja a Nemzeti Alaptanterv [21] alapján nemcsak egy egységes és hiteles kép kialakítása a matematikáról, mint tudásrendszerről, hanem a matematikai gondolkodás területeinek fejlesztésével a gondolkodás általános kultúrájának szinesítése. A matematikatanítás továbbá érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja és gazdagítja a személyiséget. Hozzásegíti a tanulót a helyes tanulási szokások kialakításához és megerősítéséhez. "A matematikatanítás szerepe a matematika különböző arculatainak bemutatása és érvényre juttatása: kulturális örökség, gondolkodásmód, alkotótevékenység, a gondolkodás örömének forrása, a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője, maga is tudomány, egyben egyéb tudományok és az iskolai tantárgyak segítője, a mindennapi élet és a szakmák eszköze." Nem véletlen tehát, hogy a matematikaórák teszik ki az iskolai órák átlagosan 15%-át [21],továbbá kötelező érettségi követelmény, a legtöbb felsőoktatási intézmény szakán megjelölt felvételi tárgy, mitöbb a munkaerőpiac is igényli a matematikai kompetenciákat.

Dolgozatom összeállítása során igyekeztem figyelembe venni a Nemzeti Alaptanterv [21] szempontjait is, mely a tanításban előtérbe helyezi a készségek, képességek, kompetenciák kialakítását és fejlesztését. "A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia - eltérő mértékben - felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására." A feladatsorok kialakítása közben szem előtt tartottam ezeket az elveket, hogy fejlesszék például a modellalkotási képességet, a gyerekek önálló tevékenységgel sajátíthasság el az ismereteket.

2. Matematikuskép

A gyerekek pályaválasztásában, de már tanulásában és érdeklődésében is igen nagy szerepet játszik, hogy milyen kép él bennük az adott szakmáról, tárgyról. Ezt elég gyakran a társadalomban élő sztereotíp kép befolyásolja. Napjainkban például sok fiatal szeretne színész, sztár, vagy a ma divatos kifejezéssel élve celeb lenni, hiszen amit a televízióban, újságokban, interneten róluk látnak, az sok esetben vonzó, hogy híresek, gazdagok, és sokan szeretik őket. Nem ilyen pozitív a kép azonban a matematikusi hivatásról. Ezt számos felmérés, közvéleménykutatás egybehangzóan mutatja. Rensaa [9] cikkében írja péld ul, hogy az általa készített felmérésben, melyben a tudósok kinézetéről, tulajdonságairól kérdezett, az emberek körülbelül 70 százaléka szerint a tudós szemüveges férfi. Többségük szerint idős, vagy legalábbis középkorú, egyedülálló, régimódi, unalmas, és antiszociális. A válaszadók csupán 20 százaléka tartotta a tudóst átlagosnak, aki nem különbözik más szakmabelitől. Ilyen, és ehhez hasonló tudományos igényű vizsgálatokat már a múlt század közepétől végeztek a tudósok társadalomban élő képéről. Például Mead és Metraux [10] 1957-ben publikált kutatása is mintegy 35000 középiskolás esszéjének feldolgozásán alapult. Ezek is mind ugyan azt, a nem éppen előnyös sztereotíp képet mutatják.

Napjainkban már rajzos felméréseket is publikálnak. D. W. Chambers például kidolgozott egy módszert (DAST, Draw A Scientist Test), melyben több mint 4800 gyermekkel rajzoltattak képet "a tudósról". Ezekből kiderül, hogy számos jellemző kapcsolódik a gyermek gondolkodásában tudóshoz, mint például a fehér köpeny, szemüveg, ceruzák, tollak, számítógép vagy tábla, továbbá a tudás szimbólumaiként könyvek, könyvespolcok, a tudomány megjelenítéseként bonyolultnak tűnő, legtöbbször értelmetlen, vagy pedig triviális képletek. Szinte mindenki férfi tudóst rajzolt, a lányoknak is csak alig több mint egy százaléka nőt. A képeken a tudós szinte mindig egy szobában, vagy laboratóriumban dolgozik, általában pincében vagy alagsorban. Későbbi, továbbfejlesztett vizsgálatok, mint például Odell, Hewitt, Bowman és Boone [15] DAST vizsgálata, vagy Rampal kezdő tanárok tudósképét vizsgáló kérdőíve [12] tovább árnyalták a képet, további jegyeket adtak a sztereotíp matematikusképhez. Ezek szerint a matematikus jól érzékelhetően brilliáns elme, gyakran elgondolkozik, érzelemmentes, nemtörődöm, hiányzik belőle a szociális érzék, és némiképp elesettnek tűnik. Egyéb kutatások folytak továbbá (például Schebeci és Sorensen [13]), hogy mennyire tér el az egyes népcsoportokban a tudósról alkotott kép. Ezek mind azt támasztják alá, hogy kevéssé. Sorensenék, illetve Finson [16] is azzal magyarázza ezt, hogy a sztereotíp képet jelentősen a média alakítja, és a világ bármely részén az emberek hasonló filmeket néznek.

Ebből is láthatjuk tehát, hogy az emberekben a matematikusokról, illetve általában a tudósokról alkotott képet is igen erősen a média befolyásolja. H. Türkmen 2006-os [14] felmérésében például az ötödikes gyerekek 45,3 százaléka tartotta fontosnak illetve nagyon fontosnak a médiát abból a szempontból, hogy milyen mértékben származik onnan az információja arról, hogy milyenek a tudósok. Ez nagyon is érthető, hiszen sokan soha nem találkoznak matematikussal, csak matematikatanárokkal, de az messze nem ugyan az, hiszen a feladatkörük is teljesen más. Berry és Picker is [17] cikkükben vizsgálták és kimutatták, hogy a tanulók általában nem tekintik matematikusnak matematikatanárukat.

Fontos tehát azzal a kérdéssel foglalkoznunk, hogy a különböző filmek milyen képet állítanak a matematikusról. Wilson és Latterell 2001-es cikkében [11] számos irodalmi művet és filmet sorol fel, amelyekben matematikus szerepel. A kutatásukba bevont művekben a matematikus többnyire zavart, néha őrült. Ez részben a létező sztereotípiákból, az íróban élő tudósképből adódik, részint abból, hogy a filmben a tudós személyisége, lelki alkata, betegsége a konfliktus forrása. [18]

A gyilkos számok viszont egy merőben új képet mutat a matematikusokról, a matematikuslétről mind Charlie, mind Amita személyében. A matematikazseni Charlie (David Krumholtz) fiatal, jóképű, energikus fiú. Nem visel szemüveget, se fehér köpenyt, normális ruhákban jár, sok barátja, még barátnője is van. Ezek már önmagukban is szöges ellentétben állnak az elképzelt tudósfigurával.

Charlie közvetlen, szinte mindig jókedvű. Matematikazsenialitása már kiskorában megmutatkozott, hároméveseп négyjegyű számokat szorzott össze, és már tizenhárom évesen felvették a Princetonra. Gyakran hangsúlyozzák is a sorozatban, hogy nem mindennapi elme, az FBI irodában is mindenki felnéz rá, csodabogárnak tartják, az egyetemen pedig sokan féltékenyek rá. A matematika népszerüsítése szempontjából ez nem túl előnyös, hiszen azt sugallja, hogy ahhoz hogy valaki értse a matekot zseninek kell lenni. Ott van viszont Amita (Navi Rawat), kezdetben Charlie tanítványa, később barátnője, majd felesége, aki egy teljesen átlagos, csinos fiatal lány. Ez is egy szokatlan képet állít a néző elé, hogy léteznek matematikusnők is, méghozzá nem furcsák, és elesettek. Gyakran dolgoznak együtt Charlie-val, segítik egymást ötletekkel, tanácsokkal, hiszen a matematikát nem feltétlenül magányosan, egyedül egy alagsori szobában kell művelni.

Charlie kiemelkedően okos, de nem tévedhetetlen. Gyakran nem vesz számításba egyes eshetőségeket, vagy rossz úton indul el, ez is azt mutatja, hogy még egy zseni is hibázik. Szimpatikus lehet Charlie megformálásában, hogy mindig mindenhol mindenkinek lelkesen beszél matematikáról, látszik, hogy szereti amit csinál, és ezt szivesen át is adja, szemléletesen magyaráz, megnyeri mind a filmbeli FBI-os közönségét, mind az otthon ülő nézőket. Feltűnhet, hogy gyakran egymás között is matematikáról van szó, ez egy állandó témát, összetartó erőt jelent a szakmabeliek között, ilyen témákról nyíltabban beszélnek egymással.

Legjobb barátja, Larry Fleinhardt (Peter MacNicol) már inkább hasonlít a "tipikus" tudóshoz. Nem igazán van a fizikán kívül más témája, kissé szórakozott, nem mindig tudja éppen melyik városban van, vagy például éppen kijött a könyvtárból vagy be akart menni. Okoskodó, tudálékos viselkedésével inkább hasonlít a sztereotíp tudósképhez. Ettől függetlenül azonban sokat segít Charlienak mind kutatásaiban mind a bűnügyek megoldásában.

Mindent összevetve a Gyilkos számok által sugallt újszerű matematikuskép egyértelműen pozitív. Szimpatikus karaktereivel, a tudományos tartalmak szemléletes bemutatásával közelebb hozza a nézőkhöz mind a matematikát, mind a matematikusi hivatást.

3. Matematikai tartalom - Steiner-fák

Meggyőződésem, hogy a matematika népszerüsítésére kiváló lehetőséget, kiindulási alapot biztosít a Gyilkos számok. A bűntények megoldásával ugyanis a matematika gyakorlati hasznára világít rá.

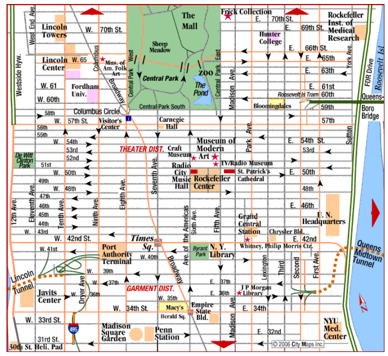
A filmben mérgezési esetek egy sorozata kapcsán eljutnak egy gyanúsítotthoz, aki egy Los Angeles melletti erdőben bújkál. Megtalálására többféle matematikai apparátust is bevezetnek. Például, megfigyelik, hogy a szökevény nem járt egy úton kétszer. Ennek kapcsán Charlie bemutatja szemléletesen a königsbergi hidak problémáját, elamgyarázza az Euler-út fogalmát, ám ez a megközelítés nem vezet megoldásra. Közben egy híres nyomolvasó észreveszi, hogy van három hely, ahol a gyanúsított többször is megfordul. Ekkor Charlie a következő modellt állítja fel: feltétlezhető, hogy a szökevény a három pont közt olyan úthálózaton halad, ami neki a leggyorsabb, tehát a megtett útvonal összhossza minimális. Ez az úgynevezett Steiner-fa feladatra, illetve, ahogy a filmben is nevezik, a buborékelméletre vezet. A Steiner-fa negyedik csúcsánál meg is találják a keresett személyt.

A filmbeli probléma matematikai modellje tehát egy (hegyesszögű) háromszögben egy olyan pont keresése, amelynek a három ponttól való össztávolsága minimális. A modellt buborék elvnek nevezik és az alábbi módon hozzák kapcsolatba a feladattal: Képzeljük el, hogy néhány szappanbuborék találkozik a levegőben, majd egyesülnek. Ekkor a köztük lévő hártyák, akárhány buborékról is legyen szó, páronként 120°-os szöget zárnak be. Ezt azzal igazolják, hogy mint a fizikában minden jelenség, a buborékok is az energiaminimumra törekszenek, és minden minimális állapot valamiféle szimmetriát mutat. Ez persze csak heurisztika. A megfelelő pont létezése és leírása három buborékra, azaz pontra Fermat nevéhez fűződik, és az így kapott pontot izogonális, vagy Fermat-pontnak nevezzük.

Charlie a filmben Steiner-fa néven emlegeti a megoldás alapötletét. Jakob Steiner (1796-1863) német matematikus volt. Nevéhez számos ismert geometriai probléma megoldása, tárgyalása, egzakt bizonyítása fűződik. Ebben a dolgozatban csak a gráfokkal, minimális feszítőfákkal kapcsolatos munkáját tárgyaljuk.

A Steiner-fa feladat egy gráfban a minimális költségű feszítőfa keresésének általánosítása. A gráf néhány pontja közötti minimális költségű feszítőfa felállítása a cél úgy, hogy bevehetők a gráf más pontjai is. Általánosabb esete az úgynevezett Euklideszi, vagy geometriai Steiner-fa, mely a sík N adott pontja között keresi a minimális összhosszúságú hálózatot. Ekkor a gráf pontjai a sík pontjai, élei az őket összekötő szakaszok, melynek súlyai a két csúcs euklideszi távolsága. Látható, hogy a feladat 3 pontra épp a fent említett Fermat-pontot adja.

A Steiner-fáknak számos gyakorlati alkalmazásuk van. Ha városok közt úthálózatot, házak közt vízvezetékrendszert, esetleg internet kábelt szeretnénk lefektetni, és a lehetséges hálózatok közül a lehető legolcsóbbat vagy a lehető legrövidebbet szeretnénk kiépíteni, mindig a megfelelő pontokra állítható Steiner-fát keressük. Napjainkban is sokan foglalkoznak a Steiner-fák elméletével, a MathSciNet-en eddig 887 publikációt referálnak. Ezeket az eredményeket foglalják össze [25],[27], [26] monográfiák. Az első egy általános összefoglaló, míg a második és a harmadik a kombinatorikus optimalizálás, illetve a kommunikációs hálózatok szemszögéből vizsgálja a problémakört. Az utóbbi 20 év fő kérdése azonban egy és ugyanaz: milyen közelítéssel lehet gyorsan feszítőfát keresni. Ismert, hogy a Steiner-fa keresés a legnehezebb kombinatorikus feladatok közé tartozik, és kicsi az esély arra, hogy bármikor is gyors kereső algoritmust találjanak Steiner-fákra [22], mégis, bizonyos hibahatárral találhatunk olyan fát, amely hossza csak kicsivel tér el az optimálistól. Sokáig az 1,55-ös szorzó



1. ábra. Manhattan utcái

volt a legjobb becslés [23], míg tavaly közzétettek egy 1,39-es pontosságú algoritmust [24]. Ez azt jelenti, hogy bármilyen ponthalmaz esetén számítógép segítségével gyorsan található olyan feszítőfa, amely hossza a Steiner-fa hosszának maximum 1,39-szerese.

Az egyik legkutatottabb Steiner-fa probléma az úgynevezett egyenes vonalú (rectilinear) Steiner-fa, az úgynevezett taxis (taxicab) geometriában, ahol csak függőleges és vízszintes élek vannak. Így, ha ott keresünk minimális utat, akkor egy másfajta távolsággal kell számolnunk. Két pont között csak „közúton” közlekedhetünk. Így például egy úthálózattal párhuzamos négyzet két átellenes csúcsának távolsága 2, míg a szokásos értelemben vett távolsága $\sqrt{2}$. Ez a geometria New York város Manhattan negyedére hasonlít, ahol az utcák egymástól körülbelül egyenletes távolságra egymással párhuzamosan, illetve egymásra merőlegesen helyezkednek el.

A Manhattan Steiner-fa fontosságát az adja, hogy nyomtatott áramkörök készítésénél a forrasztógép csak két egymásra merőleges irányba mozoghat. Azaz, ha a plexilapon össze szeretnénk kötni néhány pontot vezetékkel, akkor épp az ezekre állítható rektilineáris Steiner-fa adja a legkevesebb vezeték felhasználásával járó kapcsolatot.

A film, és a Steiner-fák széleskörű gyakorlati haszna kellő motivációt ad, hogy a gyerekekkel foglalkozzunk a Steiner-fákkal. Charlie elvileg a buborékok segítségével rajzolt fel egy fát, de a következő képen már ott volt a kész rajz, amit csak ráillesztett a pontokra. Hogyan csinálta mégis, meg tudjuk-e mi is csinálni?

3.1. Feladatok

Az eredeti probléma, amely a filmben felmerült a következő. Megfigyelték, hogy a szökevény gyakran járt ugyan azon a három helyen, ezért feltehetőleg köztük olyan úthálózaton haladt, ami neki a legjobb, tehát minimális. A matematika nyelvére lefordítva feladatunk tehát 3 pont közötti úthálózat hosszának minimalizálása.

Véleményem szerint ez egy átlagos középiskolásnak is nehéz feladat, egy kevésbé érdeklődőnek pedig még inkább. Ezért készítettük az alábbi rávezető feladatsort, melyben hasonló godolatokat, ötleteket használunk, mint amely majd az eredeti probléma megoldásához kell.

A legegyszerűbb feladat az lenne, ha nem három, hanem csak két pont között keresnénk a minimális úthálózatot. Mindenféle megkötés nélkül ez viszont triviális, hogy az őket összekötő szakasz lesz a legrövidebb, ezt a filmben még Don is tudta. Kicsit nehezebb, még mindig két pontra: két, egy egyenes által meghatározott azonos félsíkban lévő pontot összekötni úgy, hogy utunknak legyen közös pontja az egyenessel is.

1. Feladat. *[]Jancsi el szeretne jutni Iluskához, de közben még megitatja a lovát a folyónál. Merre menjen, ha minél hamarabb oda szeretne érni?*

1,Megoldás. Legyen Jancsi helye J, Iluskáé I, a folyó pedig e. Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot az egyenesen. Ha tükrözzük J-t e-re, $JP = J'P$, mivel J' független P választásától, a kérdést átfogalmazhatjuk arra, hogy mikor minimális a $JP + PI$ távolság. Nyilván akkor, ha $P \in JI$ egyenesének. □

2, Megoldás. Ezt a megoldást nem részletezzük, csak a megoldási módszert említjük meg.

Alkalmas koordináta-rendszerben a távolságokat felírva, majd deriválva szélsőértékként kapjuk, hogy a JP, IP egyenesek e-vel bezárt szöge megegyezik. Tehát keresendő az e egyenes azon pontja, amiből J-hez illetve I-hez húzott egyenesek e-vel bezárt szöge megegyezik. Az pedig nyilván a tükörkép segítségével kapható, így visszajutottunk az előző megoldáshoz. □

Megjegyzés: Segítség lehet, ha úgy kérdezzük, hogy hogyan szerkesztenéd meg Jancsi útját.

Az első megoldás a jelen helyzetben azért előnyösebb, mert a későbbiekben erre a transzformációs szemléletmódra lesz szükségünk. A második megoldás abból a szempontból lehet hasznos, hogy más megvilágításba helyezi, a problémát, a tükrözésre nem a szakaszok, hanem a szögek egyenlőségéből kell rájönni. A kétféle megoldás szemléltetése azért is előnyös, mert a gyerek látja, hogy a probléma többféleképpen is megoldható, nem csak egy kinyilvánított jó megoldás létezik.

Ezzel, és a később leírt második, harmadik feladattal már több helyen is találkozhattak a diákok. Legtöbbször a transzformációknál, illetve fakultáción a differenciálszámításnál szokták tanítani.[?]. Azért vesszük bele mégis feladatsorunkba, mert nem építünk a diákok előzetes ismereteire, viszont a transzformációs látásmódra szükségünk van az eredeti feladatunk megoldásához. Sokan nem is emlékeznek a megoldásra, így nem baj, ha felelevenítjük.

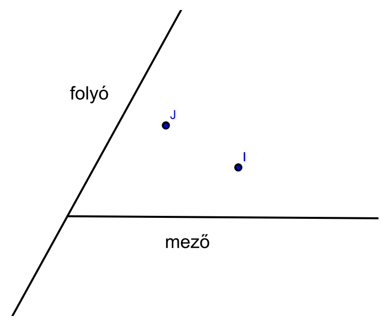
Mivel dolgozatomban főleg a matematika iránt kevésbé érdklődőkkel szeretnék foglalkozni, ezért fontosnak tartom, hogy ne száraz matematikai szövegezésű legyen a feladat. Érdekesebb, ha gyakorlati a példa, vagy meseszerűen van fogalmazva. Ez ráadásul fejleszti a gyerekek modellalkotási képességét, hiszen ha egy rajzon, térképen mutatjuk meg a feladatot házzal, meg hömpölygő folyóval, akkor még át kell fogalmaznia pontokra, egyenesre.

2. Feladat. *[]Most Jancsi még lóitatás után elmegy a mezőre virágot szedni Iluskának. Merre menjen így?*

Megoldás. Legyen ismét Jancsi J, Iluska I, a folyó e, a mező széle f; $P \in e$, $R \in f$ tetszőleges. Ismét tükrözzük P-t e-re, illetve R-t f-re. Így Jancsi útjának hossza ismét a kialakuló $J'PRI'$ töröttvonal hosszával egyezik meg. Ez pedig akkor minimális, ha J', P, R, I' kollineáris. □

Megjegyzés: Az első feladat megbeszélése után már feltehetően mindenki az első megoldást választja.

Az első feladat megbeszélése után erre már azok is könnyebben rájönnek, akik az előzőt nem tudták megoldani, ez pedig sikerélményt, nagyobb kedvet jelent. A kudarckerülő személyiségű gyerekek érdeklődését is jobban felkeltheti, önértékelését javíthatja, ha nem rögtön a nehéz feladattal kezdünk.



2. ábra.

*3. **Feladat.*** *[]Jancsi és Iluska egy folyó két oldalán laknak. Hova építsenek a folyóra merőleges hidat, hogy a lehető legrövidebb idő alatt el tudjanak jutni egymáshoz?*

Megoldás. Legyen a folyó Jancsi felőli partja e, Iluska felőli f, e egy tetszőleges pontja P. Mivel a hidat a legolcsóbbra, a folyóra merőlegesen szeretnék építeni, ezért merőlegesen $d(e,f)$ hosszú utat mindenképp meg kell tenni. Toljuk tehát el JP-t egy e és f-re merőleges, f felé mutató $d(e,f)$ hosszú vektorral. Az így keletkező $|J'P'| = |JP|$, $|PP'|$ állandó, így $J'P'I$ töröttvonal minimumát keressük. Ez megint akkor fordul elő, ha J', P', I kollineráis. Tehát a hidat a $f \cap J'I$-be kell építeni. □

Valószínűleg itt is tükrözéssel próbálkoznak először, de a híd hosszának állandóságából rá lehet jönni az eltolás alkalmazására.

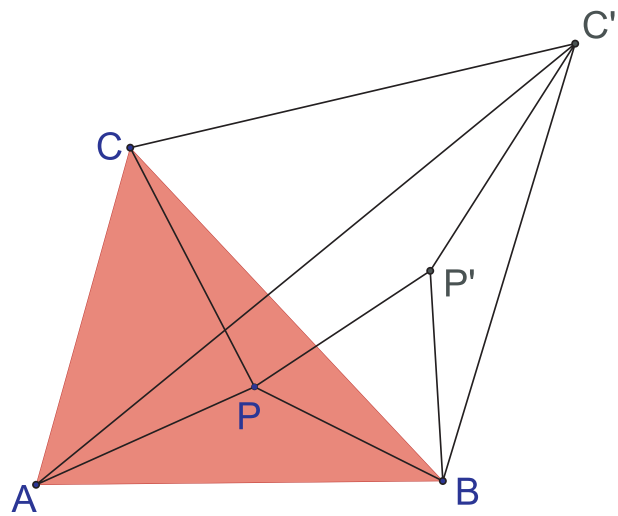
A kellő előkészítés után rátérhetünk az alapproblémára.

*4. **Feladat.*** *[]Adott egy hegyesszögű háromszög. Hol van az a pont, amelynek a csúcsoktól vett távolságösszege minimális?*

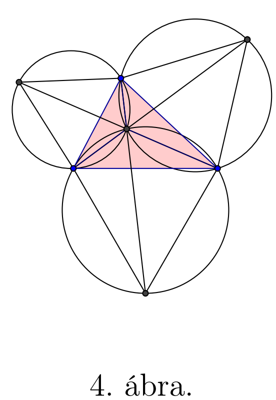
Megoldás. A csúcsok legyenek: A, B, C., továbbá P tetszőleges pont a háromszög belsejében. Ekkor keressük, hogy $AP + BP + CP$ mikor minimális. Forgassuk el BPC háromszöget B körül 60°-kal kifelé. Ekkor BPP' háromszög szabályos, így $BP = PP'$, továbbá $BPC\triangle \backsimeq BP'C'\triangle$, amiből $CP = C'P'$. Ezek alapján $AP+BP+CP = AP+BP'+C'P'$ akkor minimális, ha A, P, P', C' kollineáris, tehát ha $P \in AC'$. AC' a BC oldalra kifelé írt szabályos háromszög harmadik csúcsát A-val összekötő egyenese. Hasonlóan a többi csúcsra is, akkor lesz minimális, ha P a háromszög oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsát a háromszög szemközti csúcsaival összekötő egyenesén van.

Be kell látnunk, hogy ezek a szakaszok egy pontban metszik egymást. A jelölések az ábrán láthatók. Ekkor $BPC'\angle = A'PB\angle = 60°$, mert $A'C$-t B körül 60° -kal forgatva AC'-t kapom, így $P' \in AC'$, $BPP'\triangle$ szabályos. Továbbá $APC\angle = 120fok$, így A, P, C, C" egy körön van. AC és CC" egyenlősége miatt a kerületi és középponti szögek tétele alapján $APC"\angle = C"PC\angle = 60°$. Ezzel beláttuk, hogy C", P és B kollineáris. □

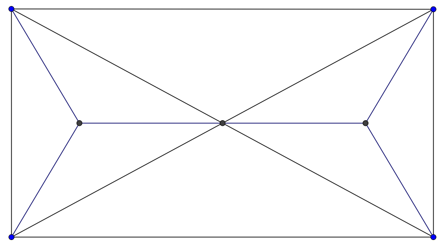
Az előző bizonyításban melléktermékként megkaptuk, hogy a Fermat-pont a háromszög minden oldaláról 120 fokos szög alatt látszik. Így tehát kétféleképp is megszerkeszthetjük az izogonális pontot. Egyrészt a háromszög oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsát a háromszög oldallal szemközti csúcsával összekötő szakaszok metszéspontjaként, másrészt a háromszög oldalaira írt 120°-os látókörívek közös pontjaként. Így



3. ábra.



4. ábra.



5. ábra.

feladhatjuk például, hogy szerkesszék meg a filmben szereplő háromszög izogonális pontját.

A megoldásban csak hegyesszögű háromszögekkel foglalkoztunk, viszont csak azt használtuk ki, hogy a háromszög minden szöge kisebb 120°-nál, hiszen feltettük, hogy P belső pont. 120° vagy nagyobb szöggel rendelkező háromszög esetében a Fermat-pont a tompaszögű csúccsal esik egybe.

Megoldottuk tehát a filmben felmerülő problémát középiskolai módszerekkel. (Még számos különböző bizonyítás található például [**?**]-ben.)

Adódik továbbá a kérdés, hogy mi a helyzet több pontra. Ezt is kis lépésekben építjük fel, hogy a gyerekek maguktól jöhessenek rá. Nézzük először négy pontra, speciális esetben.

5. Feladat. *[]Vegyük egy téglalap csúcsait. Hol van az a pont, ahonnan a csúcsokba húzott szakaszok hosszának összege minimális?*

Megoldás. Ez nyilván az átlók metszéspontja lesz, hiszen akármelyik másik pontot összekötve a csúcsokkal a háromszögegyenlőtlenség miatt hosszabb távolságösszeget kapok. □

Megjegyzés: Az előző feladat bonyolultságát látva gondolhatnánk, hogy négy pontra is hasonló, vagy nehezebb a probléma. Feltehetően lesznek olyan gyerekek, akik itt is forgatással próbálkoznak - míg eszre nem veszik, hogy az átlóval lehet javítani két Steiner-élt - hiszen egész eddig transzformációkat használtunk. Ez a csapda viszont fejleszti gondolkodásukat, hogy nem favágómódszer szerint oldjuk meg a feladatokat.

Láttuk, hogy egy újabb pont felvételével az átlók összege a minimális. Felmerül azonban a kérdés, hogy nem lehet-e ezen még javítani. Hogyan lehetne rövidebb a négy pont közötti úthálózat?

6. Feladat. *[]Rajzoljuk le az ábrán látható téglalap csúcsaira az őket összekötő minimális úthálózatot! (Hogy néz ki egy téglalap Steiner-fája?)*

Megoldás. Észrevehetjük, hogy két csúcs, illetve az átlók metszéspontja alkotta háromszög két oldala szerepel a fában, de ennél jobb a három pont Steiner-fája az izogonális pontjukkal.

Kétféleképp is javíthatunk attól függően, hogy melyik oldalpárhoz tartozó háromszöget tekintjük.

Ha az átlók szöge kisebb mint 60°, akkor csak egyféleképp javítható az átlók metszéspontja, a rövidebb oldalhoz tartozó Steiner-fával, hiszen a hosszabbakhoz tartozó háromszög metszéspontnál lévő szöge nagyobb mint 120°, annak a Fermat-pontja pedig a tompaszögnél lévő csúcs. Ha viszont az átlók szöge nagyobb 60°-nál, akkor mindkét oldalpárhoz tartozó háromszögben javíthatunk. Ekkor néhány Pitagorasz-tétel felírásával kiszámolható, hogy a rövidebb oldalhoz tartozó javítással kapott fa kisebb. Ha a két oldal a, illetve b, akkor az a-hoz tartozó javítással az összút $a + \sqrt{3}b$, illetve $b + \sqrt{3}a$.

Be kell látnunk még, hogy a rövidebb oldalhoz tartozó javítással elért fa a legrövidebb, tehát akárhogy veszünk két pontot, és kötjük össze a csúcsokkal, az összhossz nagyobb lesz. Vegyük észre, hogy a minimális feszítőfában a Steiner-pontoknál lévő szögeknek 120°-osaknak kell lenniük, különben tudnánk javítani a három ponthoz tartozó Steiner-fával, ahogy azt az átlók esetében tettük. Így tehát az új pontoknak a rövidebb oldalakhoz tartozó 120°-os látóköríven kell lenniük. A téglalap szimmetrikussága miatt a Steiner-fának is szimmetrikusnak kell lennie, vagyis a Steiner-pontok rajta lesznek az oldalfelező merőlegesen.

Marad azonban a kérdés, hogy van-e ennél is rövidebb. Csökkenthető-e vajon a fa mérete ha még több segédpontot veszünk fel? Lehet-e egy szög esetleg 120°-nál nagyobb? Mindkét kérdésre Steiner fák segítségével adhatjuk meg a választ: ha ugyanis van egy (tetszőleges) segédpontunk, akkor a két rövidebb oldal és a segédcsúcs által meghatározott háromszögek Steiner-fái minimális megoldást adnak a feladatra. Ekkor maximum két új csúcs keletkezik, amelyek összekötő vonalán szerepel a kiindulási segédpont. Ezért az összekötő vonal egy egyenes szakasz kell, hogy legyen. Így két segédpontra van szükségünk, és a megfelelő szögek mind 120°-osak. □

Megjegyzés: A szimmetria okokra való hivatkozással történő bizonyításunk eleinte elnagyoltnak tűnhet, de részleteiben jobban kifejtve helytálló. Dolgozatomban azonban erre nem térek ki, mert egy másfajta bizonyítást is láthatunk majd a következő feladat, az általános négy pont Steiner-fájára vonatkozó megoldásban. A Stener-fa szerkesztését is ott mutatjuk be.

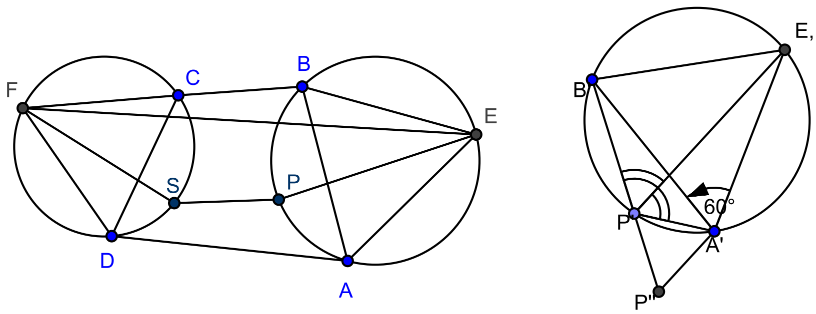
Ez a feladat nemcsak a rekurzív gondolkodást fejleszti, hiszen azt használtuk ki, hogy három pontra már ismerjük a Steiner-fát, hanem a bizonyításra való igényt is. Egyedül nem valószínű, hogy felmerült volna bennük, hogy lehet jobb úthálózatot rajzolni az átlóknál, vagy hogy lehet-e két ponttal máshogy rövidebb fát rajzolni, ha nem kérdezzük meg. Ezek után viszont már bennük is felmerülhet, hogy nem lehetne-e három újabb ponttal javítani.

Ezt a feladatot szakkörön való feldolgozáshoz javasoljuk a bizonyítás szerteágazósága miatt. Rendes óra keretei között, vagy népszerüsítő előadáson érdekességként be lehet mutatni az átlókra vonatkozó javítást a minimalitás bizonyítása nélkül.

Vizsgáljuk most általánosabb négy pont Steiner-fáját. Láttuk, hogy az állításaink többsége 120°-nál kisebb szögű alakzatokra vonatkoztak, így most is csak ilyen négyszögekre szorítkozunk.

7. Feladat. *[]Rajzoljuk le egy olyan konvex négyszög Steiner-fáját, melynek minden szöge kisebb* 120°*-nál!*

Megoldás. Az előző feladatban beláttuk, hogy a Steiner-pontokból három él indul ki, és ezek páronként 120°-osak. Így a keresendő pontok rajta lesznek két szemközti oldal 120°-os látókörívén. Legyenek a négyszög csúcsai rendre A, B, C, D, az AB oldalra kifelé írt szabályos háromszög harmadik csúcsa E, a CD oldalé F. Ekkor a Steiner-pontok rajta lesznek a két háromszög körülírt körén. Legyen P, S tetszőleges ezeken a köríveken, a rajzon látható módon.



6. ábra.

Bebizonyítjuk, hogy $PB + PA = PE$. Vegyük észre, hogy $BPE\angle = EPA\angle = 60°$, hiszen egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek. Forgassuk el az $AEP\triangle$-t Akörül 60°-kal. Ekkor E képe B, P képe P', ami rajta van BP egyenesén. Így $EP = BP+PP' = BP+PA$.

Így tehát a feszítőfa hossza egyenlő az $EPSF$ töröttvonal hosszával, ami akkor minimális, ha az említett négy pont kollineáris. □

Megjegyzés: Ezzel egy szerkesztési eljárást is adtunk négy pont Steiner-fájának megrajzolásához.

Általánosan n pontra a feladat már nehéz. Azt viszont már a téglalpnál is beláttuk, hogy a Steiner-csúcsoknál lévő szögek 120°-osak, ez általánosan n pontra is igaz, különben tudnánk javítani három pont közötti Steiner-fával. Gráfelméleti okoskodással, egy egyszerű élszámlálással pedig belátható, hogy maximum $n - 2$ új pont felvételére van szükség.

Szapanbuborékok segítségével azonban könnyen szemléltethető bármilyen elhelyezkedésű pontok között húzódó Steiner-fa. Ehhez párhuzamos, egymástól 1 cm-re lévő plexilapok közé annyi tüskét kell elhelyeznünk, ahány pontra szeretnénk nézni. Ez a szerkezet ha mosószeres oldatba mártjuk, majd onnan kiemeljük, hártyákkal kirajzolja a keresett úthálózat minimális alakját. Ilyet akár a gyerekek maguk is csinálhatnak.

3.2. Taxis geometria

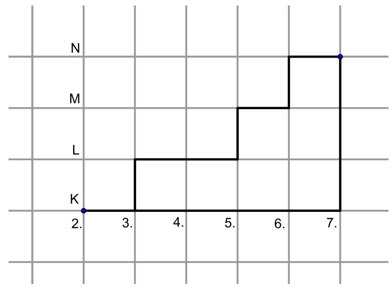
Jelentős gyakorlati haszna miatt foglalkozhatunk a taxis geomatriával is. Ez egy szokatlan tulajdonságokkal, távolságfogalommal rendelkező geometria, így mindenkelőtt vizsgáljuk meg, hasonlítsuk össze az euklideszi fogalmakkal (szakasz, kör szakaszfelező) az itt megjelenő tulajdonságokat.

Először is nézzük meg, hogy mi motiválja egy új távolságfogalom bevezetését.

8. Feladat. *[Motiváció] Egy városban az utcák merőlegesek egymásra, sakktáblaszerűen lettek kiépítve. Úgy gondolták, hogy az utcanevekről nem akarnak vitatkozni, így egyszerűen a függőleges utcákat számokkal, a vízszinteseket betűkkel nevezték el. A polgármester például a 2. és a K utca sarkán lakott. Hogyan menjen*

a) *a 2. és S utca sarkán lévő boltba;*

b) *a 7. és az N utcák találkozásánál lévő hivatalba ha a lehető leggyorsabban oda szeretne érni?*



7. ábra.

Az a, esetben nyilván a közös, 2. utcában kell menni, hiszen ha kimozdulnánk az utcából, vissza is kellene jönni. A b, esetben pedig akkor lesz a legrövidebb, ha csak jobbra illetve fölfelé megy, hiszen ekkor közeledik a hivatalhoz. Így az összes ilyen út jó a két épület között. Távolságuk pedig annyi lesz, amennyit a polgármesternek haladnia kell összesen jobbra illetve fölfelé. Az ábrán látható esetben $5 + 3 = 8$.

Megjegyzés: Ezzel közösen definiáltuk a taxis metrikában a távolságot.

Először speciális esetre néztük meg (amikor egy utcában vannak), majd így haladtunk az általános felé, hiszen ez egy furcsa, szokatlan geometria, amivel a legtöbben még nem találkoztak. Így jó, ha lépésről lépésre ismertetjük meg a gyerekeket vele. Megnézzük hogy miben hasonlít az eddig megszokott, természetessé vált euklideszi távolságra, majd csak ezt követően térünk át a szokatlan tulajdonságokra. A feladatok során folyamatosan párhuzamot vonhatunk a két geometria között. Például euklideszben két pontot összekötő szakasz egyértelmű volt, itt több lehetőségünk van. Ekkor felmerülhet a kérdés, hogy hányféle legrövidebb út van összesen.

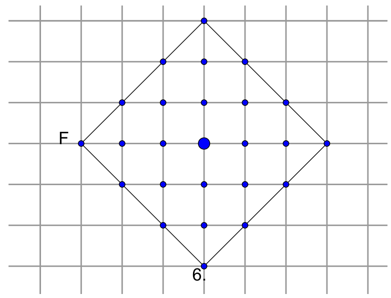
9. Feladat. *[]Hányféleképp juthat el a polgármester a hivatalba?*

1, Megoldás. Az a, esetben nyilván egy. A b, esetben összesen nyolcszor lépünk vagy jobbra, vagy fölfelé. A nyolc lépésből bármikor, de pontosan háromszor haladhatunk fölfelé, így összesen annyi út van ahányféleképpen a nyolc lépésből kiválaszthatjuk azt a hármat amikor épp fölfelé lépünk. (Ugyanezt végiggondolhatjuk az öt jobbralépésre is.) Így az utak száma:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$$

□

2, Megoldás. Először nézzük egyszerűbb esetre, és mindig írjuk rá a pontokra, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni. Ha egy utcában vannak bármilyen távolságra, akkor nyilván egyféle. Ha az egységnégyzet átellenes sarkaiban, akkor oda eljuthat eggyel lejjebbről, vagy eggyel balrábbról, így összesen kétféle úton. A $(4, L)$ koordinátájú pontba a $(4, K)$, vagy $(3, L)$ pontból mehet, így összesen $1+2 = 3$ úton, hiszen a $(4, L)$-be egy, a $(4, K)$-ba kétféle lehetőség van. Így a négyzetrács minden pontjára ráírhatjuk az oda vezető utak számát, az eggyel alatta illetve eggyel balra lévő rácspontban szereplő szám összegeként. Így adódik, hogy az $(7, N)$ pontba összesen 56 legrövidebb út vezet. □

Megoldás. 

8. ábra.

Így egy kombinatorikapéldához jutottunk, amivel a matematika témakörei közötti kohézióra világíthatunk rá, hiszen geometriafeladat kapcsán merült fel kombinatorikai kérdés. Fontosnak tartom ezt is szemléltetni, hogy a matematika nem különálló témakörökből áll, ezek összefüggnek, egységet alkotnak.

Véleményem szerint mindkét megoldás tanulságos. Ha már tanultak a gyerekek kombinatorikát, a binomiális együtthatókat, akkor az első megoldás újabb szemléletes példát ad az ismétlés nélküli kombinációra. A második megoldáson pedig észrevehetjük, hogy a rácspontokba írt számok pont a Pascal-háromszög elemei, így innen is eljuthatunk a binomiális együtthatókon keresztül az első megoldáshoz. Továbbá ez a megoldás a gyerekek rekurzív gondolkodásmódját erősíti, hiszen kisebb távolságokra írtuk fel először, majd ebből kiindulva haladtunk a nagyobb távolságok felé, felhasználva hogy kisebbekre már tudjuk. Ráadásul ez az elgondolás nem használ középiskolai tananyagot, általános iskolásoknak is feladható. Akik versenyekre, szakkörökre járnak, azoknak ismerős lehet, gyakran szoktak ehhez hasonló feladatokat adni, de rendszerint nem ilyen keretben, így nekik a ráismerés élményét nyújthatja.

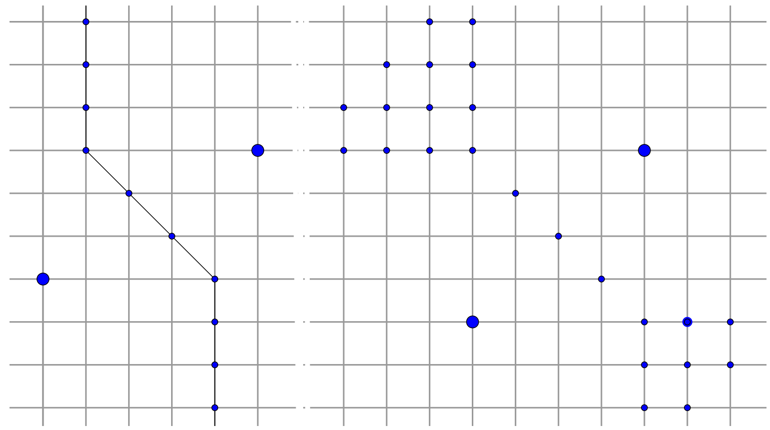
Miután két pont távolságát definiáltuk megvizsgálhatjuk, hogy hol helyezkednek el azok a pontok, amik egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak, vagyis hogy néznek ki a körök.

10. Feladat. *[]Nyílt egy pizzéria a városban, a 6. és az F utca sarkán, ami házhozszállítást is vállal. Viszont egyenlőre csak biciklis futáraik vannak, akik hogy a pizza ki ne hűljön, az étteremtől csak három egység távolságra szállítanak. Mely házak rendelhetnek így pizzát? És ha motorral már ötre is tudnak?*

Az ábrán látható négyzeten lévő pontok vannak éppen három távolságra. Ennek belső pontjai kevesebb mint háromra, külső pontjai pedig már több mint háromra. Ötre hasonlóan egy négyzet és ennek belső pontjai lesznek jók. □

Kis távolságra feladva a feladatot egyszerűen megkapjuki, pusztán próbálgatással, hogy hol lesznek ezek a pontok. Erre mindenki rá tud jönni, semilyen ötlet nem kell hozzá, így a gyerekek önmaguk veszik észre, tapasztalják meg ennek a különös geometriának a tulajdonságait. Szemléletesen ezekkel a kis példákkal is látszik, hogy bármilyen nagyobb számra is hasonlóan néznek ki a hagyományos értelemben vett körök, egy négyzetként. Ennek a precíz bizonyításától azonban ebben a dolgozatban eltekintünk. Bár csak a taxis metrika távolságfogalmát, illetve az abszolútértékfüggvény tulajdonságait használnánk, ami önmagában nem haladná meg a középiskolás ismereteket, unalmas lenne a sok egyforma eset vizsgálata. Célunkat e nélkül az absztrakt tárgyalásmód nélkül is elérjük, hogy a gyerekek jártasságot szerezzenek ebben az újfajta geometriában.

Megoldás.



9. ábra.

11. Feladat. *[[A városban immáron két pizzéria van, amelyek bármekkora távolságra vállalnak szállítást. Megbeszélték azonban egymás között, hogy az veszi át a rendelést az adott háztól, akihez közelebb van. Hogyan osztották így fel a várost egymás között,*
a) ha a másik pizzéria az 11. **és az I utca sarkára épült?**
b) És ha a 10. **és a J sarkára?**

Először vizsgáljuk meg, hogy hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a két adott ponttól. Nyilván jók lesznek az őket összekötő szakaszok felezőpontjai, és a két pont, mint átellenes csúcsok által meghatározott téglalap pontjai küzül csak ezek lesznek jók. Ekkor próbálgatással észrevehetjük, hogy a többi pont egy-egy félegyenesen van, ami az ábrán látható. Ezen félegyenesek minden pontja jó lesz, hiszen a kezdőpontjai jók, onnan pedig fölfelé illetve lefelé haladva ugyanannyival nő minkét ponttól vett távolság. A vonaltól jobbra az egyik, míg ettől balra a másik ponthoz lesznek közelebb. A négyzet esetében is hasonlóan meggondolhatjuk, hogy az ábrán látható pontok jók. □

Megjegyzés: Ennek a precíz bizonyításától is eltekintünk.

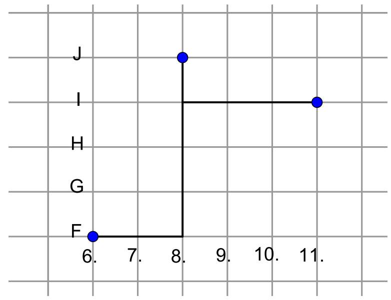
Ez az előbbi feladattal egy másik bizonyítási technikát tár elénk, amelynek során valahogyan megtaláljuk a helyes megoldást (a feltételeket kilégítő pontokat), és belátjuk, hogy a többire nem teljesül.

Megoldva a feladatot igen meglepő eredményhez jutunk. Már egy téglalap átellenes csúcsaira is különös alakú a szakaszfelező, nem egy egyenes, hanem egy töröttvonal. Négyzetre pedig egészen rendkívüli, hogy egy-egy síknegyed minden pontja olyan, hogy egyenlő távolságra van az átellenes csúcsoktól.

Most, hogy már kellően megismertettük a gyerekeket ezzel a különös geometriával, rátérhetünk a Steiner-fa feladatokra. Először keressük meg három pontra a minimális összhosszúságú feszítőfát.

12. Feladat. *[[A városban nyílt még egy pizzéria (a* 11.a) *feladatban szereplők mellé) a* 8. *és J utcák találkozásánál. Szeretnének egymással kommunikálni. Merre fektessék le a telefondrótokat, hogy a legolcsóbb legyen?*

A feladatunk tehát olyan minimális összhosszúságú úthálózatot felrajzolni, ami mindhárom pontot tartalmazza. A megoldás az ábrán látható. Ennél rövidebbet nem lehet, hiszen az úthálózatban bármely pontból bármely másikba el kell jutnunk úton. Így a 6. utcától el kell tudnunk jutni a 11-ig, továbbá az F-től J-ig is, ami összesen $5 + 4 = 11$. □

Megoldás. 

10. ábra.

Előfordulhat, hogy általános helyzetű három pontra nehezebben megy, ekkor segítő kérdéseket tehetünk fel, például mi lenne, ha egy utcában lennének, tehát ha az előző feladat b, részében szereplő pizzériát nézzük. Mivel feltehetően próbálgatással rajzolják fel az utat, tehát felrajzolnak egy lehetségeset, majd pedig azt javítják, így minden ilyen esetnél látják, hogy ami minimálisnak tűnt, mégsem a legjobb volt. Ezzel felmerül az igény a bizonyításra, hogy amit aztán már nem tudnak tovább javítani az valóban a minimális-e. Ekkor világíthatunk rá, hogy egy alsó becslés adásával bebizonyítható, hogy nincs jobb.

Egy algoritmus adásával belátható, hogy három pontra mindig megvalósítható az alsó becslésnek megfelelő hosszúságú úthálózat. Például függőlegesen a középső ponthoz behúzzúk a rajta fekvő vízszintes egyenest, majd függőleges vonalakkal hozzákötjük a másik két pontot. (Ha függőlegesen nincs középső, akkor legalább kettő kollineáris, ekkor húzzuk be az ő egyenesüket.) Véleményem szerint ez inkább szakkörre való feladat, de a gyerekek érdeklődéséhez mérten feladható rendes óra keretei között is. Nehézsége inkább csak abban rejlik, hogy felmerül-e az igény a gyerekekben általánosan mondani valamit, ha már egyszer a konkrét feladatot megoldottuk. Több pontra általánosan azonban már nincs gyors algoritmus. Hasonló alsó becslés adható, de a speciális esetektől eltekintve ezek meg sem közelítik a valódi minimumot, így ezekkel nem foglalkozunk.

Hivatkozások

[1] American Broadcasting Company, *Ratings search for Numb3rs* (June 15, 2010)

[2] National Science Board, *The "Numb3rs" Add Up: Popular TV Show and Its Creators Receive Public Service Award* (April 16, 2007)

[3] http://numb3rs.wolfram.com

[4] www.math.cornell.edu/ numb3rs

[5] J.A. Paulos, *Innumeracy. Mathematical Illiteracy and Its Consequences* Vintage Books (1988)

[6] Comenius, *Didactica Magna* (1657)

[7] E. Weisstein *The Math(ematica) behind Television's Crime Drama NUMB3RS*, (May 24, 2007)

[8] K. Devlin *Numbers gets the math right*, Mathematical Association of America (Aug, 2007)

[9] R. J. Rensaa, *The Image of a Mathematician*

[10] M. Mead and R. Metraux *The image of the scientists among high school students: a pilot study*, Science, (1957)

[11] J. L. Wilson and C. M. Latterell, *Nerds? Or nuts? Pop culture portrayals of mathematicians*, ETC: A Review of General Semantics, 58, 172-178 (2001)

[12] A. Rampal, *Images of science and scientists: A study of school teachers' views I. Characteristics of scientists*, Science Education, 76(4), 415-436 (1992)

[13] R. A. Schibeci and I. Sorenson, *Elementary school children's perceptions of scientists*, School Science and Mathematics. 83 (1): 14-19 (1983)

[14] H. Türkmen, *Turkish primary students' perceptions about scientist and what favtors affecting the image of scientists*, Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4(1), 55-61. (2008)

[15] M.R.I. Odell, P. Hewitt, J. Bowman, W.J.Boone, *Stereotypical images of scientists: A cross-age study*, Paper presented at the 41st annual national meeting of the National Science Teachers Association, Kansas City, MO. (1993, április)

[16] K. D. Finson, *Appliciability of the DAST-C to the images of scientists drawn by students of differerntial racial groups*, Paper presented at the annual regional meeting of the North Central Region Association for the Education of Teachers of Science, Madison, WI. (2001)

[17] J.S. Berry and S.H. Picker, *Your pupis' images of mathematicians and mathematics*, Mathematics in School, 29: 24-26 (2000)

[18] Korándi J.,

[19] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I., *Sokszínű matematika tankönyv 9*, Mozaik, 206 (2005)

[20] Somfai Zs., *A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai (5-12. évfolyam*

[21] *2*43/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról; (9, 22, 41.)

[22] Garey, M. R.; Graham, R. L.; Johnson, D. S., *The complexity of computing Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math. **32** (1977), no. 4, 835–859.

[23] G. Robins and A. Zelikovsky, *Improved Steiner tree approximation in graphs,* in Proceedings of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2000), 2000, pp. 770–779.

[24] Byrka, Jarosław, at. al *An improved LP-based approximation for Steiner tree.* STOC'10—Proceedings of the 2010 ACM International Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 583–592,

[25] Dingzhu, Du and Hu, Xiaodong *Steiner tree problems in computer communication networks*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008. xiv+359 pp

[26] Prömel, Hans Jürgen; Steger, Angelika, *The Steiner tree problem. A tour through graphs, algorithms, and complexity* Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig, 2002. viii+241 pp.

[27] Hwang, Frank K., Richards, Dana S. and Winter, Pawel, *The Steiner tree problem* Annals of Discrete Mathematics, 53. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. xii+339 pp.