

**ELTE TTK Matematikai Intézet  
Matematikatanítási és Módszertani Központ**



**Modellezési kompetencia és modellezési  
lépések.**

**Esettanulmány egy nyolcosztályos gimnázium  
tanulóiról.**

Témavezető:  
dr. Ambrus Gabriella  
adjunktus

Szerző:  
Tóth Bettina

**TDK dolgozat  
Budapest, 2013**

# Tartalomjegyzék

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1.Bevezetés.....                                                   | 2  |
| 2.A modellezés fogalma.....                                        | 4  |
| 2.1.Modellezési kompetencia.....                                   | 4  |
| 2.2.Modellezési feladat.....                                       | 5  |
| 2.3.Modellezési ciklus.....                                        | 5  |
| 3.Tantervi igények.....                                            | 7  |
| 3.1.Bildungsstandards („Képzési követelmények”).....               | 7  |
| 3.2.Nemzeti alaptanterv (NAT).....                                 | 10 |
| 4.Gyakorlati kérdések.....                                         | 14 |
| 4.1.A modellezési kompetencia vizsgálatának módjai.....            | 14 |
| 4.2.A modellezési feladatok értékelése.....                        | 16 |
| 4.3.A modellezés szerepe az oktatásban.....                        | 17 |
| 5.A vizsgálat menete és tanulságai.....                            | 19 |
| 5.1.A feladatokról.....                                            | 19 |
| 5.1.1.A feladatválasztás szempontjai.....                          | 19 |
| 5.1.2.A feladatok.....                                             | 22 |
| 5.1.2.1.Első feladat: London Olympic Stadium.....                  | 22 |
| 5.1.2.2. Második feladat: Az olimpiai résztvevők száma.....        | 25 |
| 5.1.3.Lehetséges megoldások.....                                   | 26 |
| 5.1.3.1.Első feladatkör.....                                       | 26 |
| 5.1.3.2.Második feladat.....                                       | 33 |
| 5.2.A tanulók.....                                                 | 36 |
| 5.3.A dolgozatban használt vizsgálati módszer.....                 | 37 |
| 5.3.1.A vizsgált szempontok.....                                   | 38 |
| 5.4.Eredmények.....                                                | 39 |
| 5.4.1.A modellezési lépések.....                                   | 39 |
| 5.4.2.A különböző korcsoportok eredményei.....                     | 41 |
| 5.4.3.Az átlagos lépésszám alakulása.....                          | 45 |
| 5.4.3.1.A különböző feladattípusok összehasonlítása.....           | 45 |
| 5.4.3.2.Alap és emelt szint.....                                   | 46 |
| 5.4.4.Megjegyzések az első és a harmadik modellezési lépésről..... | 47 |
| 6.Az eredmények szerepe az oktatásban.....                         | 49 |
| 7.Összefoglalás.....                                               | 51 |

# 1. Bevezetés

Az ELTE Bsc képzése alatt találkoztam először valóságközeli, illetve modellezési matematikafeladatokkal. Ezek felkeltették érdeklődésemet, így elkezdtem részletesebben is foglalkozni velük, magam is számos feladatot és hozzájuk tartozó lehetséges megoldást készítettem. Ezek különböző korcsoportoknak szólnak, sokféle témát dolgoznak fel, és sokféle matematikai területet érintenek. A tanári mesterképzés nagy hangsúlyt fektet a pedagógiára és a szaktárgyi módszertanra, így automatikusan adódott az ötlet, hogy ezeket a feladatokat a gyakorlatban is kipróbáljam.

Németországban már évek óta kiemelkedő szerepet játszik a fejlesztendő kompetenciák között a modellezési kompetencia, így jelentős német nyelvű szakirodalom gyűlt össze az általános- és középiskolai matematikai modellezéssel kapcsolatban. Lehetőségem volt egy félévet a Heidelbergi Egyetemen tanulni, így személyesen is megtapasztaltam, mekkora hangsúlyt fektetnek erre a témára a matematikatanár-képzésben.

Magyarországon csak lassan válik ismertté a matematikai modellezés fogalma az általános- és középiskolákban, de a 2012.évi Nemzeti Alaptanterv (NAT) már hangsúlyos szerepet szán neki. A fejlesztési feladatok között több matematikai témakörnél és korosztálynál is találkozhatunk a fejlesztendő kompetenciák között a modellek választásának, keresésének és alkotásának képességével.

Hogy feltérképezzük, mit gondol a társadalom, és ezen belül mit gondolnak a tanulók a matematikáról, nem kell messzire mennünk, elegendő egy kis időt az internet előtt eltölteni, blogokat vagy közösségi oldalakat olvasgatni, és máris temérdek karikatúrával, ironikus és szarkasztikus ábrázolással találkozunk. Ezek közül látható egy az 1.1.ábrán.



1.1. ábra

Valóban, a matematika órákon gyakoriak a szöveges feladatok között az ún. „beöltöztetett feladatok” (lásd Jahnke, 2001) vagy „prototípus feladatok”, melyek sokszor abszurd szituációkat ábrázolnak és a valóságtól teljesen távol álló helyzeteket jelenítenek meg. Ez nem véletlen, hiszen fő céljuk adott matematikai tartalom szövegbe öltöztetése, a kontextus gyakorlatilag közömbös.

Saját tapasztalataim azt mutatják, a tanulók legtöbbször mechanikusan megoldják a szöveges feladatokat az éppen használatos matematikai eszközzel, amiről tanulnak, majd a választ éppen ilyen mechanikusan fogalmazzák meg szöveges formában is, tehát nem gondolkodnak el túl sokáig, hogy az eredmény, amit kapnak, mennyire illeszkedik az eredeti szituációhoz. Szerencsére akadnak kivételek, erre példa a következő eset: Egy nyolcadikos lány egy szöveges feladatot oldott meg, melyben egy L alakú fürdőszoba alapterületét kellett kiszámítani. A végeredmény  $6 \text{ m}^2$  volt, mire ő megkérdezte: „Nem túl kicsi az?”. A kérdés hallatán nagyon megörültem, hiszen az eredmény értékelése egy nagyon fontos és szükséges képesség, valamint nem melleleg egy modellezési lépés is. Hogy eldöntsük, elegendő terület-e ez egy fürdőszobának, saját fürdőszobáink méretét becsültük meg. Arra jutottunk, hogy bár valóban nem túl nagy ez az alapterület, elfér benne minden, amire egy fürdőszobában szükség lehet. Hogy gyakrabban találkozzunk ilyen gondolkodásmóddal, úgy gondolom, nagyobb figyelmet kellene fektetni a problémamegoldás során a modellezési folyamat lépéseinek elsajátítására, a matematikai feladatok valós kontextusba helyezésére.

Mivel a legtöbb iskolában a tanulók ritkán találkoznak valódi, komplex, valóságközeli és nyitott modellezési feladattal, és elsősorban az ún. beöltöztetett feladatokat szokták meg, kíváncsi voltam, mennyire képesek felkészítés nélkül és a modellezési folyamat ismerete nélkül megoldani az ilyen összetett feladatokat. Hogyan végzik a modellezést, fel tudják-e tárni a valós szituáció és a matematika közötti összefüggéseket, és a kontextusnak megfelelően tudják-e értékelni az eredményeket.

Ehhez készítettem feladatlapokat a különböző korosztályok számára, melyeket egy kecskeméti nyolcosztályos gimnázium tanulói oldottak meg.

## **2. A modellezés fogalma**

### **2.1. Modellezési kompetencia**

Dolgozatomban a modellezési kompetenciának kitüntetett szerepe van, hiszen éppen ezt szeretném részletesebben vizsgálni a saját készítésű feladatlapok kipróbálásával. Míg Magyarországon a modellezés fogalma még újkeletűnek számít, addig Németországban a modellezési kompetencia már 2003 óta a hat alapvető matematikai kompetencia egyikeként szerepel a tantervekben, így ott már számos szakirodalom látott napvilágot a témában. Az előbbieket miatt, és mert a német matematikatanítás több vonatkozásban is hasonlóságot mutat a magyar hagyományokkal, dolgozatomban a német nyelvű irodalom megközelítéseit tekintem kiindulási alpnak. A modellezési kompetenciáról szűkebb és tágabb értelmezés létezik, ezeket Julia Riebel disszertációjában (Riebel, 2010) részletesen is taglalja. Az általam végzett kutatáshoz egy szűkebb értelmezésű definíció kiválasztása célravezetőbb, mert így áttekinthetőbbé válnak a vizsgált részkompetenciák, és egyértelműbb vizsgálati szempontokat nyerünk. Werner Blum a matematikai modellezés egyik legnevesebb kutatója, és az ő definíciója a legelterjedtebb a témában, így magam is ezt használom. Ez a modellezési feladatra és a modellezési folyamatra vezeti vissza a modellezési kompetenciát:

“Modellezési kompetencia alatt azokat a kompetenciákat értjük, amelyekre egy modellezési feladat megoldáshoz szükség van (kivéve a matematikán belüli munkát) és amelyek többek között modellezési folyamattal írhatók le.” (Blum, Leiß 2005)

A definíció további értelmezéséhez tisztáznunk kell a modellezési feladat és a modellezési ciklus fogalmát.

## 2.2. Modellezési feladat

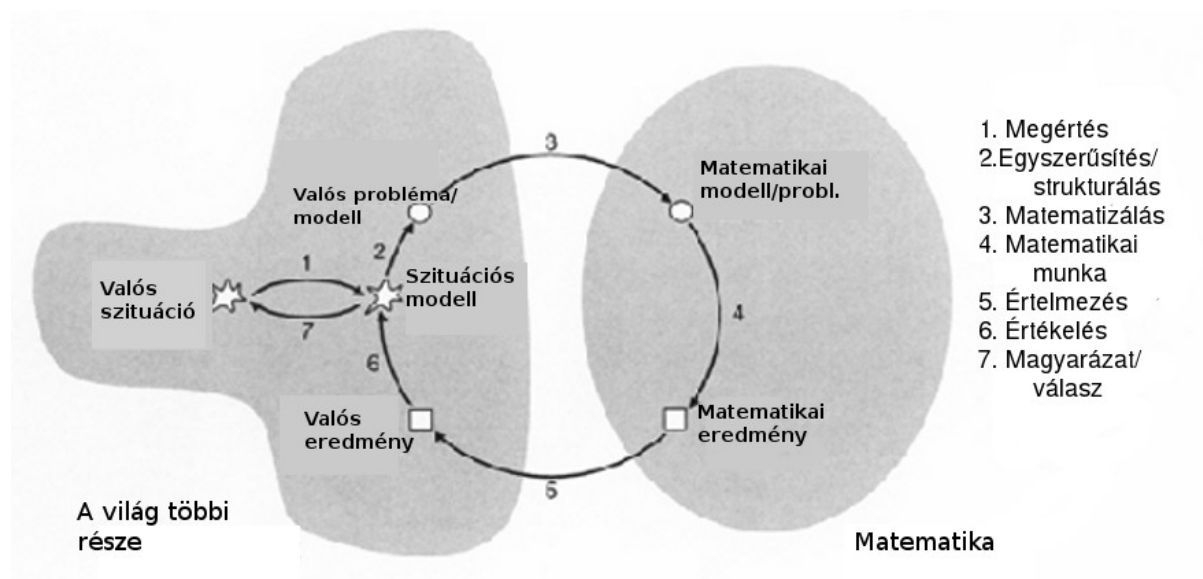
Tágabb értelemben modellezési feladatnak tekinthető minden olyan feladat, amelyben egy hétköznapi probléma megoldásához matematikai modell alkotására van szükség, ahol matematikai modell alatt valamilyen, strukturált, egyszerűsített sémát értünk, amely segíti a valóság megértését. (vö. Ambrus, 2007)

Szűkebb értelemben ezentúl még más tulajdonságokat is elvárunk a modellezési feladatoktól, például Katja Maaß a következő jellemzőket tartja fontosnak ezeknél a feladatoknál: nyitottság, komplexitás, valóságközeliség, autentikusság, problémaközpontúság és megoldhatóság modellezési folyamat végrehajtásával. (vö. Maaß, 2007)

## 2.3. Modellezési ciklus

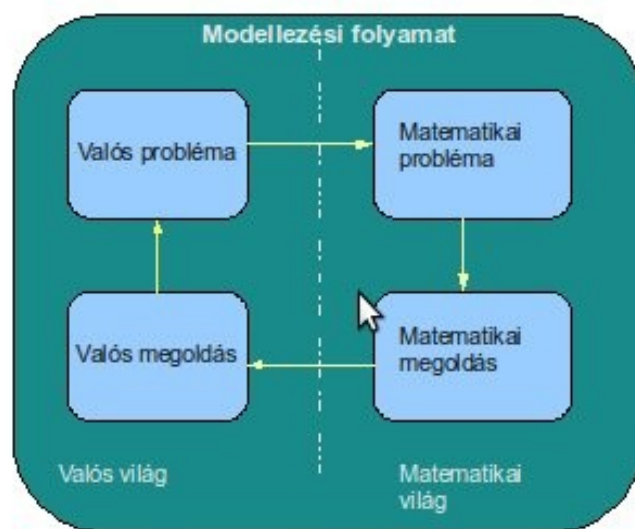
Werner Blum a fent említett tulajdonságok közül a valóságközeliséget és modellezési folyamatot - vagy más néven modellezési ciklust - tartja a legfontosabbnak. Az ő felfogásában a modellezési feladatok valóságközeli feladatok, amelyek alapvető (kétirányú) fordítást követelnek meg a valóság és a matematika között. (vö. Blum, 2010) Tulajdonképpen ennek a fordítási folyamatnak a részletes bemutatása adja a modellezési ciklust. (2.1. ábra)

A folyamat 7 lépése tehát: 1. megértés, 2. egyszerűsítés és strukturálás, 3. matematizálás, 4. matematikai munka, 5. értelmezés, 6. értékelés, 7. magyarázat, válasz.



2.1. ábra

Maga Blum is említi (vö. Blum, 2010), hogy ez csak egy ideális elképzelés a modellezési folyamatról, mert az egyes lépések nem mindig különülnek el ennyire élesen egymástól, valamint a ciklusban hurkok is keletkezhetnek, így elterjedt egy egyszerűbb séma a ciklus ábrázolására (2.2.ábra), mely csak 4 alapvető lépést határoz meg. (vö. Maaß, 2007 és Greefrath; 2007) Ezek a lépések a következők: 1. a valós probléma alapján matematikai probléma vagy modell létrehozása. 2. a matematikai probléma megoldása matematikai eszközökkel, 3. a matematikai eredmény értelmezése a valóságban, 4. a kapott valós eredmény értékelése a valós probléma tekintetében. Ez a négy lépés magában foglalja a valós kiindulási szituáció helyes értelmezését. Az egyes lépések végrehajtásának képessége adja valójában a modellezési kompetencia főbb részkompetenciáit. Ezek további alkategóriákra is bonthatók (Maaß, in: Jahnke, 2010), de ettől itt most eltekintünk.



2.2. ábra

Katja Maaß modellezési kompetencia értelmezésében is a fenti lépések jelennek meg, szerinte ha a tanulók megtanulnak valós problémákat modellezni, az azt jelenti, hogy megtanulják végrehajtani a modellezési folyamat egyes lépéseit. Azaz elsajátítják a következő kompetenciákat: (Maaß, 2007)

- a valós probléma megértése, valamint a valós és matematikai modell létrehozása
- matematikai kérdések megoldása matematikai modellen belül
- a matematikai eredmény értelmezése a valós szituációban
- a kapott megoldás értékelése

A dolgozatban tehát ezt a négy alapvető lépést vesszük figyelembe, és ezek meglétét, illetve hiányát fogjuk vizsgálni a tanulók feladatmegoldásaiban.

### 3. Tantervi igények

Mint korábban szó volt róla, a modellezési feladatok motiválóak lehetnek, mert közelebb hozzák a valóságot és a matematikát egymáshoz. Segítenek, hogy a diákok ne egy elvont tudományként tekintsenek erre a tantárgyra és az általa közvetített ismeretekre.

A feladatok által kialakítható modellezési kompetenciára későbbi életünkben is szükség lesz. Például arra, hogy mennyiségeket értelmesen tudjunk becsülni és kerekíteni. Hasznos lehet, ha olyan helyzetbe kerülünk, mikor egy problémát egyszerűsítve, sémákkal, modellekkel közelítve kell megközelítenünk és megoldanunk, majd az megoldás értelmezése és értékelése a feladat. Sőt, sokszor egyszerűen már az is segítség bonyolult, összetett problémák megoldásakor, ha strukturálni, egyszerűsíteni tudjuk ezeket, hogy könnyebben átláthatók legyenek.

Németországban a modellezési kompetencia már régóta a Bildungsstandards stabil részét képezi, kiemelt figyelmet fordítanak ezen terület fejlesztésére. Több módszertani kutató is foglalkozik a témával, a kompetencia megfelelő elsajátításának és elsajátíttatásának módjával.

Magyarországon a 2012-es Nemzeti alaptanterv szánt először kitüntetett szerepet a modellezésnek. A matematikai megismerés és problémamegoldás fontos részeként kezeli a modellkeresést és a modellalkotást.

A következőkben részletesebben taglalom, mit ért a két nemzet tanterve modellezés alatt, hogyan jelenítik meg a modellezési kompetenciát, és milyen részkompetenciák jelennek meg ezzel kapcsolatban.

#### 3.1. Bildungsstandards („Képzési követelmények”)

Németországban az 1990-es évekig hiányzott az iskolai képzési módszerek eredményességének szisztematikus vizsgálata, ellenőrzése. Mindaddig a tantervkészítésben elsősorban a megtanítandó tananyag és bizonyos módszertani kérdések játszottak szerepet, tehát a „mit és hogyan tanítsunk” kérdése, nem pedig az elérni kívánt eredmények lefektetése.

Az 1997-es Nemzetközi Matematikai és Természettudományos Tanulmányon (TIMSS) a német tanulók teljesítménye nem bizonyult túl jónak, ezért a kormány úgy ítélte meg, változásokra van szükség az oktatáspolitikában. Ezért az az évi Kultuszminiszeri Konferencián (KMK) elhatározták, hogy Németország hosszútávon részt vesz a nemzetközi



tanulmányi teljesítményméréseken.

Előtérbe került ezáltal annak kérdése, hogy a diákoknak mit kell tudniuk, milyen teljesítményt kell nyújtaniuk, tehát a bemenet helyett a kimenet vált érdekessé.

A 2000. évi PISA-felmérés eredményei ismét csalódást hoztak, így a szakemberek hangsúlyozni kezdték a minőségbiztosítás fontosságát, így merült fel az igény az országosan egységes és kötelező képzési követelmények (Bildungsstandards) megfogalmazására.

A KMK 2003-ban elfogadta az első Bildungsstandardokat német, matematika és első idegen nyelv tantárgyakból. A következő néhány évben további tantárgyak és korosztályok követelményei lettek lefektetve, ezzel átláthatóbbá téve a tanulási és tanítási célokat, valamint az elért eredmények mérhetőségét.

### Bildungsstandards Mathematik

A matematika tantárgyat illetően három dimenzióját határozták meg a képzési követelményeknek, melyek a következők:

1. az általános matematikai kompetenciák (Kompetenzen)
  - matematikai érvelés
  - matematikai problémamegoldás
  - matematikai modellezés
  - matematikai ábrázolások alkalmazása
  - szimbolikus, formális, technikai eljárások a matematikával
  - matematikai kommunikáció
2. tartalmi vonatkozású matematikai kompetenciák, úgynevezett „Leitidee”-k (vezérelvek) szerint rendezve (Leitideen)
  - szám
  - mérés
  - tér és alakzatok
  - függvényszerű összefüggések
  - adatok és véletlen

### 3. más követelményterületek (Anforderungsbereiche)

- reprodukció
- összefüggések alkotása
- általánosítás és reflektálás

Az általános matematikai kompetenciák alkotják a matematikai képzési követelmények magját, lényegében ezek az alapvető matematikai kompetenciák, melyeket tartalmi elemekkel töltünk meg. De az úgynevezett Leitidee-k sem csupán a tartalmi elemek felsorolásáról szólnak, hanem arról, milyen kompetenciák kötődnek ezekhez a tartalmakhoz, megfelelő értelmezésükhöz és alkalmazásukhoz. A harmadik csoportba azok a kompetenciák kerültek, amelyek a matematikai feladatmegoldás során szükségesek és fejleszthetők, de a matematikai kompetenciáknál általánosabbnak tekinthetők.

#### Matematikai modellezés

Mint feljebb látható volt, a Bildungsstandard alapvető matematikai kompetenciaként tekint a matematikai modellezésre. A 2003-as középszintű végzettséggel rendelkező (10.évfolyam) tanulók számára előírt követelményrendszer a modellezési kompetencia alatt a következő készségeket érti:

- a modellezni kívánt téma vagy szituáció matematikai fogalmakra, struktúrákra és relációkra történő átírása, lefordítása
- munka a matematikai modellel
- az eredmények interpretációja és vizsgálata a megfelelő szituációban vagy témában

Ugyanehhez a követelményrendszerhez kapcsolódóan 2010-ben megjelent egy kiadvány, mely a Bildungsstandardnak megfelelő oktatást hivatott segíteni, a kompetenciák részletesebb körülírásával és konkrét feladatok bemutatásával. Ebben a matematikai modellezés öt fő lépése a következő:

1. a valós probléma megértése
2. a leírt szituáció egyszerűsítése és strukturálása
3. az egyszerűsített valós szituáció transzformálása a matematikába
4. a matematikai probléma megoldása matematikai eszközökkel
5. a matematikai eredmény értelmezése és felülvizsgálata a valós kontextus alapján

Ezek a lépések megfelelnek a modellezési folyamatnál bemutatott lépéseknek és részkompetenciáknak, melyeket a későbbiekben a tanulók munkáiban is vizsgálni fogunk. Az említett 2010-es kiadvány is kiemeli, hogy a modellezési kompetencia szempontjából a matematikán belüli megoldás folyamata kevésbé releváns, valamint az első modellezési lépés is inkább a kommunikatív kompetenciák csoportjába tartozik. A modellezés legfontosabb eleme a valóság és a matematika közötti transzformáció, a két „nyelv” közötti fordítás, melynek két iránya van, az első a valóságból egyszerűsítéssel kapott matematikai modell létrehozása, a második pedig a kapott matematikai eredmény visszahelyezése a valóságba.

Az egyes tartományok az országosan meghatározott Bildungsstandards-nak alárendelve létrehozhatják saját tantervüket, melyben az alapvető kompetenciáknak és tartalmaknak megfelelően évfolyamokra lebontva összeállítják az elsajátítandó ismeretek és képességek részletes listáját.

A német tantervek tehát már az első reformkezdeményezésektől kezdve hangsúlyos szerepet szánnak a modellezési kompetencia fejlesztésének. Azaz az oktatás feladatának tekintik, hogy a diákok elsajátítsák a valóság és a matematika összefüggései felismerésének képességét, valamint értelmezni és értékelni tudják a matematika segítségével talált megoldásokat.

## **3.2. Nemzeti alaptanterv (NAT)**

Magyarországon 1995-ben fogadták el az első Nemzeti alaptantervet, melyet azóta három alkalommal vizsgáltak felül és módosítottak: 2003-ban, 2007-ben, valamint 2012-ben. Hazánkban ez a tantervi szabályozás legfelsőbb szintje, ennek vannak alárendelve a kerettantervek, a kerettantervek alatt pedig a helyi tantervek állnak.

A NAT meghatározza az iskolai nevelő-oktató munka tartalmi kereteit és szabályozási szintjeit, a fejlesztendő kulcskompetenciákat, valamint tartalmazza a megismerendő műveltségi területek leírását és a főbb fejlesztési célokat is.

A 2012-ben elfogadott NAT 2013.szeptember 1-jén lép hatályba, tehát hamarosan ennek szellemében és előírásai szerint kell tanítani az általános- és középiskolákban. Bár a korábbi Nemzeti alaptantervekben is találkozhatunk a modellezés fogalmával, a legújabb változat szánja a leghangsúlyosabb szerepet a modellezés képességének. A dolgozat tehát a matematikai modellezésnek a 2012-es NAT-ban elfoglalt helyét fogja tárgyalni.

A NAT-ban szereplő kulcskompetenciák a következők:

- Anyanyelvi kommunikáció
- Idegen nyelvi kommunikáció
- Matematikai kompetencia
- Természettudományos és technikai kompetencia
- Digitális kompetencia
- Szociális és állampolgári kompetencia
- Kezdeményező képesség és vállalkozói kompetencia
- Esztétikai-művészeti tudatosság és kifejezőkészség
- A hatékony, önálló tanulás

A Nemzeti alaptanterv a következő leírást adja a matematikai kompetenciáról:

A matematikai kompetencia kialakításához elengedhetetlen az olyan meghatározó bázisképességek fejlesztése, mint a matematikai gondolkodás, az elvonatkoztatás és a logikus következtetés. E kompetencia összetevőit alkotják azok a készségek is, amelyekre támaszkodva a mindennapi problémák megoldása során a matematikai ismereteket és módszereket alkalmazzunk. A matematikai kompetencia kialakulásában, hasonlóan más területekhez, az ismeretek és a készség szintű tevékenységek egyaránt fontos szerepet töltenek be.

Szükséges képességek, készségek, ismeretek és attitűdök :

A matematikai ismeretek magukban foglalják a számok, mértékek, struktúrák, az alpműveletek és az alapvető matematikai fogalmak, jelölések és összefüggések készség szinten alkalmazható tudását. A matematikai kompetencia azt jelenti, hogy felismerjük az alapvető matematikai elveket és törvényszerűségeket a hétköznapi helyzetekben, elősegítve a problémák megoldását a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. E kompetencia teszi lehetővé a törvényszerűségek felismerését a természetben, és alkalmassá tesz az érvek láncolatának követésére, a matematika nyelvén megfogalmazott törvények megértésére. A matematikai műveltséghez való pozitív hozzáállás annak az igazságnak a tiszteletén alapul, hogy a világ rendje megismerhető, megérthető és leírható.

A matematikai kompetencia összetevőjeként tehát megjelenik a világ matematikán keresztüli leírásának és megismerésének képessége, illetve ezen képesség felhasználása a hétköznapi problémamegoldás során. Észrevehető, hogy a német Bildungsstandard nagyjából ezt a jelenséget tekinti a modellezési kompetencia alapjának.

A NAT a matematikai műveltségterületet 3 részben taglalja:

- A) Alapelvek, célok
- B) Fejlesztési feladatok
- C) Közműveltségi tartalmak

Ezek közül a fejlesztési feladatokról érdemes részletesebben beszélni, mert a modellezés itt kapott szerepet. Ehhez nézzük először ennek a résznek a szerkezetét:

#### 1. Tájékozódás

- 1.1. Tájékozódás a térben
- 1.2. Tájékozódás az időben
- 1.3. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban

#### 2. Megismerés

- 2.1. Tapasztalatszerzés: a tapasztalatok tudatosítása, közlése, rögzítése, jelölése, ezek értelmezése, visszaolvasása
- 2.2. Képzelet (követő, alkotó)
- 2.3. Emlékezés
- 2.4. Gondolkodás
- 2.5. Az ismeretek rendszerezése
- 2.6. Az ismerethordozók használata

#### 3. Az ismeretek alkalmazása

#### 4. Problémakezelés és -megoldás

#### 5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás

#### 6. Akarati, érzelmi szabályozás, az önfejlesztés képessége és az együttéléssel kapcsolatos értékek

- 6.1. Kommunikáció
- 6.2. Együttműködés
- 6.3. Motiváltság
- 6.4. Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás

#### 7. Matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei

Minden fejlesztési részterületen belül korosztályok szerint, táblázatba rendezve találjuk a fejlesztendő részkompetenciák részletes leírását.

A modellezéssel először a megismerés alfeladat alatt találkozunk. Itt a 7-12. évfolyamos tanulók fejlesztendő képességeként találjuk a modellezést, mint a tapasztalatszerzés eszközét. A tanulóknak tehát el kell sajátítaniuk, hogyan ismerhetnek, érthetnek meg egy jelenséget valamilyen modell segítségével. Szintén a tapasztalatszerzés részeként elvárt minden évfolyamon a „szavakban megfogalmazott helyzet, történés matematizálása: matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz”, illetve ennek fordítottja, azaz a matematikai modellhez szöveges feladat készítése, mely segít a modell értelmezésében. A megismerés részeként fejlesztendő a gondolkodás is, ahol szintén szerepet játszanak a modellek minden évfolyamon: „Matematikai modellek megértése [...], átkódolás más modellbe. Adott modellhez példa, probléma megfogalmazása”, illetve elvárt még az „egyedi tapasztalatok, modellek; általános tapasztalatok, univerzális modellek értelmezése” is.

A megismerés mellett a problémamegoldásban is helyett kapott a modellezés. 7-8. évfolyamon elvárt a „problémához illeszthető matematikai modell választása, keresése, alkotása”, valamint minden évfolyamon elvárt a „megoldás a matematikai modellen belül; matematikai modellek [...] ismerete, alkalmazásának módja, korlátai (pontosság, értelmezhetőség); önellenőrzés; felelősségvállalás az eredményért”. A problémamegoldás alatt modellezésről felvázolt kép és az elvárt kompetenciák szinte teljesen lefedik a modellezés korábban megfogalmazott definícióját. Ezen a ponton tehát találkozik a német és a magyar elképzelés a modellezésről.

A problémamegoldáson túl az alkotás és kreativitás részterület is említi a modellezést. Itt elsősorban a modellalkotás célja kerül előtérbe, hiszen minden évfolyamon követelmény „modell alkotása helyzet megértéséhez”, „probléma megoldásához”, valamint „modell alkotása, értelmezése fogalmakhoz”, ezentúl pedig tudni kell átkódolni különböző modellek között.

Mint látható a NAT-ban a modellezés nem egyetlen fő kompetenciaként jelenik meg, hanem más kompetenciák és fejlesztendő területek alkotóelemeiként. Amit a modellezéstől elvárunk az mégis ugyanaz, amit a német tantervek is célul tűztek ki.

## 4. Gyakorlati kérdések

### 4.1. A modellezési kompetencia vizsgálatának módjai

Riebel többek között a modellezési kompetencia diagnosztikájának lehetséges módjait is vizsgálta. (Riebel, 2010)

A kompetenciamérés nehéz feladat, nehéz kialakítani olyan értékelési rendszert, mely objektív módon, számokkal mérhető eredményt produkál. Ráadásul a különböző részkompetenciák sokszor túl szorosan kapcsolódnak egymáshoz, ami megnehezíti, hogy elkülönítve vizsgáljuk őket. Ez különösen jellemző a modellezési kompetencia összetevőire is, hiszen az egyes lépések végrehajtásának módja hatással lesz a következő lépés kivitelezésére is.

Az alábbiakban röviden bemutatásra kerül három eljárás, melyeket a modellezési kompetencia vizsgálatában már kipróbáltak.

#### a) Tanári értékelés

A modellezési kompetencia tanári értékelésen keresztül történő vizsgálata lényegében azt jelenti, hogy a tanulók az iskolai modellezési projekteken nyújtott teljesítményükre a tanáruktól kapnak jegyet. Ezután ezeket a jegyeket veszik alapul, hogy megítéljék a tanulók modellezési kompetenciájának fejlettségét. Hall (1984, in: Riebel, 2010) azt javasolja, hogy a tanulókat három részteljesítményre kapjanak jegyet: a tartalomra (content), az előadásra (presentation) és a végrehajtásra (drive). A tartalom a modellezés technikai részleteire helyezi a hangsúlyt, az előadás az eredmények bemutatására és a projektbeszámoló minőségére, míg a végrehajtás a hozzáállásra és a modellezési projekt menedzselésre.

Ez a módszer jól illeszkedik az iskolai hétköznapiakhoz, fontos információkhoz juthatunk a tanulók modellezéssel kapcsolatos összteljesítményének tekintetében, azonban nem alkalmas például arra, hogy azt vizsgáljuk, mennyire fejlettek az egyes tanulók modellezéshez szükséges részkompetenciái.

## **b) Megfigyelés**

A tanári értékelés kevés teret hagy arra, hogy a tanulók gondolkodásmódját és az általuk végzett modellezési folyamatot részleteiben megismerjük. Ezzel szemben a megfigyelés során a kutató jelen van, és pontosan követi a diákok viselkedését és cselekvéseit a modellezési feladat megoldása során. Sőt, valamilyen formában meg is örökíti ezt a folyamatot, hogy a későbbiekben lehetősége legyen részletes elemzés készítésére.

Megemlíthető módszer itt például a videofelvétel készítése vagy protokollírás a diákok hangos gondolkodásáról.

Greefrath (2006) az előbbi módszerrel végzett kutatást modellezési feladatokkal kapcsolatban. A tanulók önként jelentkezhetek, hogy részt vegyenek a megfigyelésben. Párokban kellett nyitott, valóságközeli és modellezési feladatokat megoldaniuk. A megoldási folyamatot a kutatók videokamerával rögzítették. A páros munka azért volt kifejezetten alkalmas a modellezési folyamat nyomonkövetésére, mert a tanulók így automatikusan megosztják egymással gondolataikat, következtetéseiket anélkül, hogy erre külön felszólítást kapnának. A tanulók munkafolyamatát öt kategóriába sorolták:

- tervezés
- adatok gyűjtése
- adatok feldolgozása
- ellenőrzés
- maradék

A megoldási folyamat lépéseinek időigényét, és a részlépések végrehajtásának a helyességét vizsgálták. Illetve azt is, van-e valamilyen összefüggés a feladattípus és az adott típus esetén a lépések végrehajtásának munkaigényessége között.

A videofelvételes megfigyelés tehát segítségünkre lehet a megoldási folyamat és a tanulók gondolkodásmódjának megismerésében, számszerű adatokat azonban nem szolgáltat az egyes tanulók kompetenciáról.

## **c) Multiple-Choice tesztek**

A megfigyelésnél pontosabb képet adnak az egyes modellezési részkompetenciákról az úgynevezett multiple-choice tesztek, azaz az olyan feladatsorok, ahol a tanulóknak néhány



megadott válaszlehetőség közül kell kiválasztaniuk azt, amelyiket helyesnek tartják. Nyilvánvalóan a modellezési kompetenciák elemzéséhez úgy kell kiválasztani és megfogalmazni a feladatokat, hogy azok csak egy-egy kompetenciát kérjenek számon.

Ezeket a „karikázós” teszteket könnyű javítani és pontozni, így könnyen juthatunk számszerű értékekhez, és a részkompetenciák is jobban elkülönülnek.

## 4.2. A modellezési feladatok értékelése

A modellezési folyamat és a modellezési feladatok meghatározásából látható, hogy egy adott feladatnak többféle jó megoldása is lehet. A tanulók választhatnak egyszerűbb és összetettebb modelleket, sokféleképpen számolhatnak és értékelhetik a megoldást. Éppen ezért sok nehézséget okoz a feladatmegoldások értékelése. Nehéz eldönteni például, hogy értékesebb-e egy olyan feladatmegoldás, amely összetett modellel dolgozik, de sok hibát vét, mint egy egyszerű modellt használó megoldás, amelyet hibátlanul kiviteleztek. Az értékelés emellett attól is függhet, hogy a tanulók milyen munkaformában oldották meg a feladatot. Csoportmunka esetén például nem csak a tanár értékelhet, hanem a tanulók egymást is.

Mivel a modellezési feladatok megoldása közben modellezési folyamatot hajtunk végre, melynek lépései erőteljesen összefüggenek egymással, a feladatmegoldást is komplexen kell értékelnünk. Praktikus lehet, ha előre elkészítünk egy értékelési táblázatot, melyben megfogalmazzuk, mit várunk a tanulóktól a modellezési feladat megoldásában, illetve azt is, hogy az egyes részletek hány pontot érhetnek. Ilyen táblázatokat találhatunk például Maaß (2005) munkásságában, illetve a LEMA-Projekt<sup>1</sup> anyagában is.

A választott modell értékelésekor a kiindulási szituáció figyelembevételével több szempontot is értékelhetünk. Például hogy megfelelőek-e, értelmesek-e a tanuló feltételezései, vagy hogy milyen mértékű egyszerűsítést használ a modellben. (Maaß, 2005)

Értékelési szempontjainkat természetesen előzetesen a tanulókkal is meg kell osztanunk, hogy számukra is világossá váljanak a követelmények, ne legyenek ilyen jellegű bizonytalanságaik a feladatmegoldás során. A modellezési feladatok értékelése így is szubjektívebb marad, mint a hagyományos matematikafeladatoké, azonban értékelési szempontok, és a pontozási skálák előzetes rögzítése elősegíti a tanulói egységesítést.

---

1 [http://www.lemma-project.org/web.lemma-project.org/web/dvd\\_2009/german/assessment.html](http://www.lemma-project.org/web.lemma-project.org/web/dvd_2009/german/assessment.html)

### 4.3. A modellezés szerepe az oktatásban

Mint az a dolgozatban eddig kiderült, modellezési feladatokkal foglalkozni matematika órán több szempontból is igen hasznos. Például csökkenti a sokakban kialakult nézetet, miszerint a matematika rendkívül elvont tudomány, és a valósághoz semmi köze. A feladatok megoldása sokszor kreativitás igényel, a tanulók szabadon engedhetik fantáziájukat, de ezzel együtt egy bizonyos fokú pontosságra ügyelni kell. Ez a fajta szabadság motivációt is jelent a diákok számára, miközben megtanulják, melyik helyzetben mennyire pontos adatokra van szükség.

A modellezés által kialakuló készségek és képességek a mindennapi életben is hasznunkra válhatnak. Sok olyan szituációval találkozunk az életben, ahol rendszerezni vagy szervezni kell valamit. Ehhez a dolgok átlátásra, strukturálására van szükség. Ezt a képességet közvetítik a modellezési feladatok is.

A NAT a matematikai fejlesztési feladatok között a megismerés és a problémamegoldás címszó alatt emeli ki legtöbbször a modellezést, mint szükséges kompetenciát. Ez nem véletlen, a körülöttünk lévő világot jobban megértjük, könnyebben megismerjük, ha egyszerűsített formában tárul elénk, azaz modellek képében. Ugyanígy a problémákat is könnyebben megoldjuk, ha előbb egyszerűsítjük, pl. átfogalmazzuk vagy részproblémákra bontjuk.

Természetesen a modellezési feladatok nem helyettesítik a többi, matematika órán megszokott feladattípust. Minden feladattípusnak megvan a maga helye és szerepe az oktatásban, legyenek azok gyakorló feladatok, szöveges feladatok vagy beöltöztetett feladatok. Így a modellezési feladatokat időről időre érdemes bevinni az órákra, hogy kiegészítsük velük a tanítást, a többi feladat által közvetített tudást és kompetenciákat.

A modellezési feladatokkal érdemes fokozatosan megismertetni a tanulókat. Először vihetünk órára rövid, egyszerű feladatokat, akár olyanokat is, melyek csak egy-egy modellezési részkompetenciát erősítenek, míg eljutunk a tanulókkal összetett, soklépéses feladatok megoldásáig. (vö. Maaß, 2005) Ezeket az összetettebb feladatokat mindenképpen érdemes csoportmunkában, esetleg projektek keretében megoldani a tanulókkal. Projektek keretében már olyan feladatok is adhatók, melyek sok kutatómunkát igényelnek, sok szempontból nyitottak.

Természetesen az összetett modellezési feladatok feldolgozása időigényes munka. Azonban ez mindenképpen megtérül, hiszen mind a tanulók készségei, ismeretei, mind a matematikához való hozzáállásuk sokad fejlődik. Éppen a NAT-ból már idézett matematikai kompetencia kialakulását segíthetjük elő ilyen feladatok alkalmazásával, hiszen kiválóan reprezentálják a valós élet matematikai leírhatóságát és megérthetőségét.

Sokszor hallhatunk tanárokat panaszkodni arról, hogy alacsony az óraszám, ezért nincs idejük új dolgokat beépíteni a tanmenetükbe. Úgy gondolom, a modellezési feladatoknak azonban jelen kell lenniük a matematikaórák mindennapjaiban, hiszen az általuk fejleszthető kompetenciák fejlesztését maga a NAT is előírja. Illetve attól sem kell tartani, hogy elveszi az időt bizonyos anyagrészek megtanításától, mert akár anyagrészek kiegészítése vagy lezárásaként is alkalmazható, hiszen tényleges matematikai tudás is szükséges ezen feladatok megoldásához. Érdeemes lehet akár a témakörök végén egy-egy órát modellezési feladatokkal eltölteni, hogy az adott tananyag alkalmazhatósága előtérbe kerüljön, a tartalmi tudnivalók pedig elmélyüljenek.

## **5. A vizsgálat menete és tanulságai**

### **5.1. A feladatokról**

#### **5.1.1. A feladatválasztás szempontjai**

A kipróbálandó feladatok kitalálásakor arra törekedtem, hogy mindhárom korosztályban azonos téma köré épüljenek, de az adott évfolyamoknak megfelelő matematikai ismeretekre legyen szükség a megoldásukhoz. Minden korcsoportban szerettem volna különböző modellezési feladattípusokat kipróbálni, hogy kiderítsem, megfigyelhető-e valamilyen különbség abban, mennyire könnyen vagy nehezen találunk a célnak megfelelő modellt az egyes típusoknál.

Szinte lehetetlen olyan témát találni, amely a 13-18 éves tanulók mindegyike számára adekvát és kellőképpen érdekes, mégis igyekeztem elérni ezt a lehetetlen célt, és legalább aktualitásában és érthetőségében megfelelő témakört találni. Így esett a választásom a 2012-es Londoni Olimpiai Játékokra. Ez a témakör kellően szerteágazó, sok résztémakör, sok információ és adat található benne, melyekre modellezési feladatokat lehet építeni. A reklámok, szabadtéri élő közvetítések és sikerek hatására még a kevésbé sportrajongókhoz is valamennyire közel került a nyáron ez a téma.

Két modellezési feladattípust választottam ki, méghozzá a leíró és az előrejelzőt. Egyrészt azért, mert a tanulók által megszokott, „beöltöztetett” szöveges feladatok által elvárt gondolkodásmód ezekhez áll a legközelebb, így esélyesebbnek látom, hogy a tanulók megfelelő megoldásokat produkálnak, vagy legalább megpróbálják megoldani a feladatot, így elegendő adatot tudok gyűjteni az elemzéshez. Másrészt a másik két típus – normatív és magyarázó – sokszor erősen kötődik valamelyik másik természettudományhoz is, ami gyakran megijeszti a tanulókat, és azok így elkedvetlenednek. Valamint nem szerettem volna, ha az esetleg más tantárgybeli hiányosság miatt nem kapok semmilyen megoldást a feladatra.

A feladatlapokon szereplő első feladat tartozik az ún. leíró kategóriába. Itt a matematikai modellt valamilyen jelenség vagy tárgy leírására használjuk, amely így segít nekünk az adott probléma megoldásában. (vö. Greefrath, 2007) Mindhárom korosztályban a Londoni Olimpiai Stadion köré csoportosulnak a feladatok, de az összetettségük és a felhasználandó matematikai ismeretek tekintetében egyre nehezednek a korcsoportnak megfelelően.

A 7-8. osztályosok számára feladott 1. feladatban lényegében a futópályát kell modellezni. Viszonylag egyszerű modellt találni, amelyben csak általuk ismert síkidomok (kör, téglalap) szerepelnek, és ezzel közelebb jutni a megoldáshoz. A megoldás során megjelenhet a számtani sorozat, de nem kell feltétlenül felhasználniuk az ehhez tanult képleteket, elég ha „józan ésszel”, implicit módon alkalmazzák azt. Szükség van még néhány becslésre is, melyet a szövegben található információk és a mellékelt ábrák nagyban segítenek.

A 9-10. osztályosok leíró feladatában is ugyanarról a stadionról van szó, de a modellalkotás már kicsit nehezebb. Valójában a stadion első sorának alakja egy ellipszisre emlékeztet leginkább, és ennek területére lenne szükség a probléma megoldáshoz. Ezt azonban még sem célszerű modellként választani, mert a tanulók nem ismerik a területének kiszámítási módját. Így egy kicsit több absztrakcióra van szükség, mint például a felvázolt lehetséges megoldásban, ahol a futópálya alakjával közelítjük az ellipszis területét. Persze akár cérnával vagy kis körzőnyílással is mérhető az ábrákon szereplő területek hossza, melyeknek arányát így meg tudjuk állapítani, és ha felhasználjuk azokat a hosszakat, amiket a valóságban is ismerünk, akkor a hasonlóságot kihasználva eljuthatunk a stadion „belső területének” valós hosszáig. A feladatban tehát valamelyest nehezebb a modellalkotás, de továbbra is elegendők egyszerű síkgeometriai ismeretek a matematikai megoldáshoz.

A 11-12. osztályos tanulók 1. feladata még egy fokkal összetettebb modellezést, és valamivel több matematikai ismeretet feltételez. A feltüntetett lehetséges megoldásban például az egyik egyszerűsítési lépés, hogy a térbeli problémát síkbelivé alakítjuk. Egy másik fontos egyszerűsítési lépés, hogy a stadion ellipszisszerű alakját körökkel modellezzük, hogy a számolást megkönnyítsük. A feladat szöveges része csak kevés információt ad meg, sok kiegészítő információt kell még megbecsülni, illetve kiszámolni a mellékelt ábrák segítségével. A megadott példamegoldásban használt modell mellett már csak egyszerű matematikai számításokra van szükség, viszont ehhez arra a nagyon fontos egyszerűsítő „modellezési gondolatra” is szükség volt, hogy a széksorok számát tekintsük arányosnak a körgyűrűk vastagságával. Más modellek esetén pedig esetleg magasabb szintű matematikai ismeretek is szükségesek lehetnek, ezért nem javasolnám ezt a feladatot alacsonyabb korosztályok számára.

A feladatlapok második feladata minden korosztálynál teljesen azonos, ez egy ún. előrejelző feladat. A tanulók kapnak egy grafikont, mely az elmúlt évek olimpiai résztvevőinek számát mutatja. Ennek segítségével kell valamilyen jóslást tenniük a következő (4 évvel későbbi) és egy 100 évvel későbbi olimpiára. A feladatot minden korosztály számára feladhatónak találtam, mert sokféle megközelítés és szempont létezhet, ezek alapján pedig sokféle modell kitalálható hozzá megfelelő indoklás mellett. Éppen arra vagyok kíváncsi, megfigyelhető-e valamilyen különbség a korosztályok között a probléma értelmezésében és a kitalált modell összetettségében. Erre találhatunk példákat a leírt lehetséges megoldásban is. A különböző modellek nagyon különböző becsléseket hoznak, így itt érdemes külön hangsúlyt fektetni az eredmény értékelésének és valós kontextusba helyezésének lépésére. A feladat lehetőséget kínál arra, hogy megfigyeljük, a tanulók csak mechanikusan megírják a kapott eredményt szöveges válasz formájában is, vagy el is gondolkodnak-e azon, hogy mennyire felel meg ez a válasz a realitásnak.

A feladatlapok megoldására a diákoknak egy tanóra, azaz 45 perc állt rendelkezésükre. A feladatok kitalálásakor is ennyi idővel számoltam, de ha személyesen tudtam volna megírni a tesztet a tanulókkal, és igényelték volna, biztosítottam volna még időt a számukra, mert nem a gyorsaságra szerettem volna helyezni a hangsúlyt.

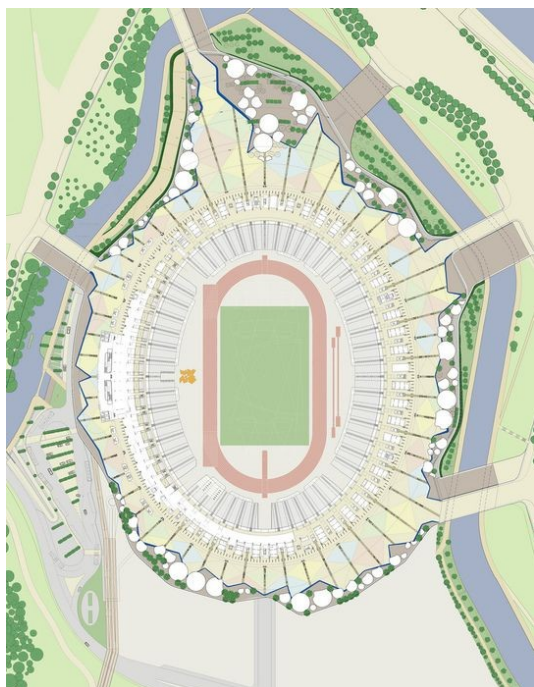
## 5.1.2. A feladatok

### 5.1.2.1. Első feladat: London Olympic Stadium

7-8.osztály



5.1. ábra (forrás:en.wikipedia.org)



5.2. ábra (forrás: sportales.com)

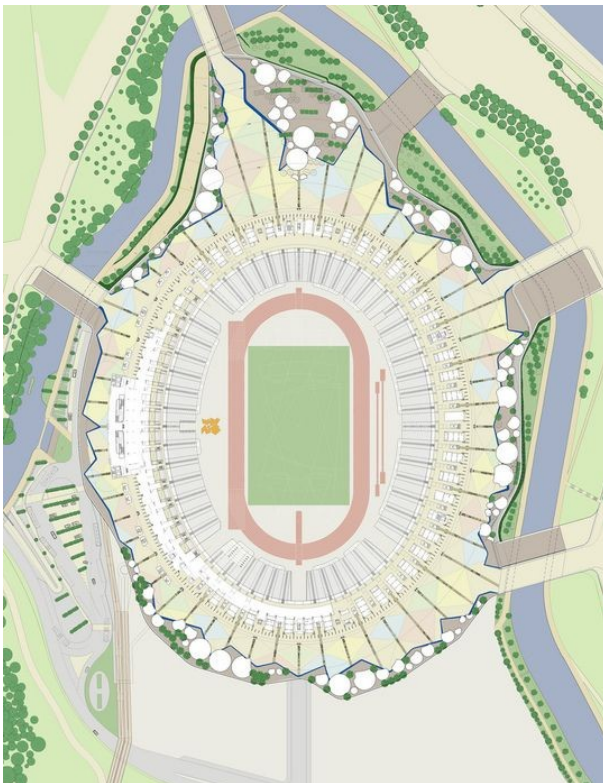
A képeken a 2012. évi Londoni Olimpiai Stadion látható. Az épület 80 000 ember befogadására képes. Itt rendezték a legtöbb atlétikai versenyt, így a pálya alkalmas 400 méteres futóversenyek és 100 méteres sprintfutások szervezésére is.

A 400 méteres számban a versenyzőknek egy kört kell megtenniük a pályán. Nyilvánvaló azonban, hogy a különböző sávok nem ugyanolyan hosszúak. Mennyivel hosszabb a legszélső sáv, mint a legbelső? Hogyan festened fel a rajtvonalat, hogy korrigáld ezt a hibát? Írd le, hogyan gondolkodtál!





5.3. ábra (forrás:en.wikipedia.org)



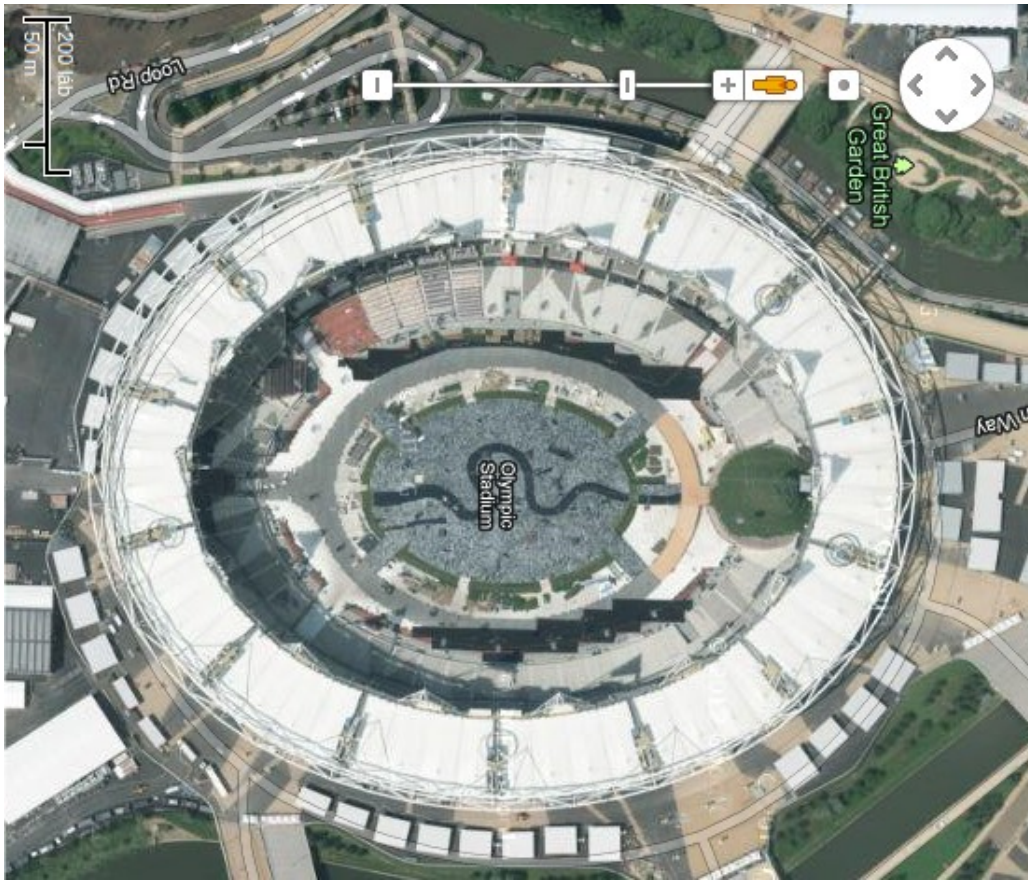
5.5. ábra (forrás: sportales.com)



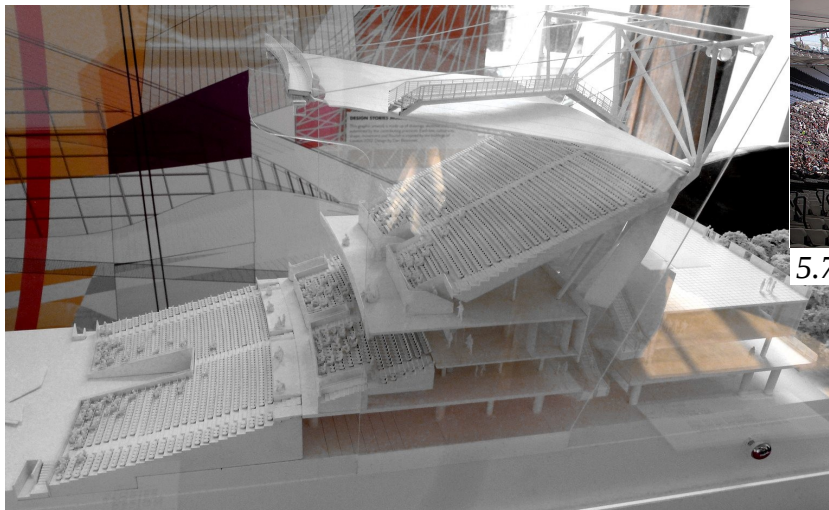
5.4. ábra (forrás:londontown.com)

A képeken a 2012. évi Londoni Olimpiai Stadion látható. Az épület 80 000 ember befogadására képes. Itt rendezték a legtöbb atlétikai versenyt, így a pálya alkalmas 400 méteres futóversenyek és 100 méteres sprintfutások szervezésére is. Izgalmas lehetett ezeket a versenyeket a lehető legközelebbről megtekinteni. Vajon hány néző fért el az alsó szint legelső sorában? Írd le, hogyan gondolkodtál!





5.6. ábra (forrás: maps.google.com)



5.8. ábra (forrás: en.wikipedia.org)



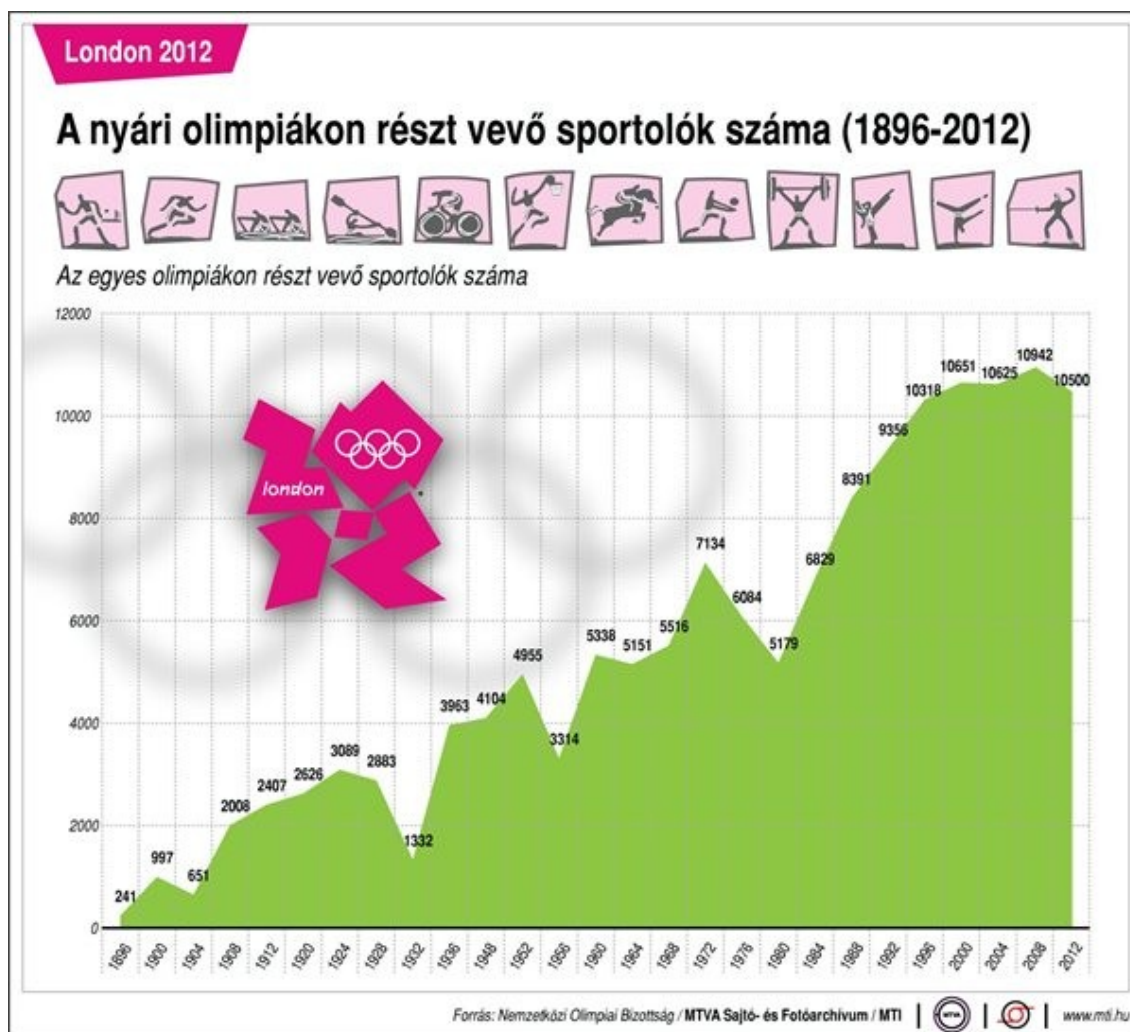
5.7. ábra (forrás: en.wikipedia.org)

A képeken a Londoni Olimpiai Stadion, illetve szerkezeti makettje látható.

A Stadiont úgy építették meg, hogy alsó szintje - mely 25 ezer ember befogadására képes - később is használható maradjon, míg felső két szintje könnyűszerkezetes, újrahasznosítható elemekből épült, hogy az Olimpia után elbontható legyen. A képek segítségével határozd meg, körülbelül hány látogató befogadására lehetett képes a Stadion az Olimpia ideje alatt! Írd le, hogyan gondolkodtál!

### 5.1.2.2. Második feladat: Az olimpiai résztvevők száma

7-12.osztály



5.9. ábra

A grafikon alapján becsüld meg, hány résztvevője lehet a következő, illetve egy 100 évvel későbbi olimpiának! Írd le, hogyan gondolkodtál!<sup>2</sup>

<sup>2</sup> 1912-ben a Föld lakossága kb. 1,6 milliárd fő volt.  
2012-ben a Föld lakossága kb. 7 milliárd fő.

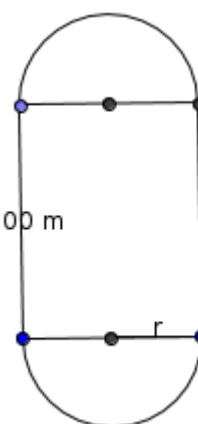
### 5.1.3. Lehetséges megoldások

#### 5.1.3.1. Első feladatkör

##### 7-8.osztály

##### 1. megközelítés

A feladat megoldásához a futópálya méreteinek kiszámítására lesz szükség. A legbelső pálya hosszát ismerjük, a képek segítségével becsülhetjük a sávok szélességét és a hozzájuk tartozó hosszt, ami elvezet a külső sáv hosszához, így meg tudjuk mondani, mennyivel hosszabb ez, mint a legbelső. Ezután adhatunk ötleteket a rajtvonal felfestéséhez.



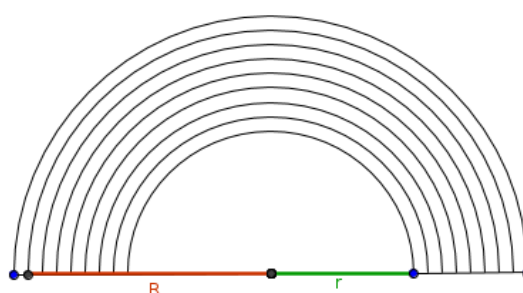
5.10. ábra

A futópálya alakját modellezhetjük egy téglalap segítségével, melynek két rövidebbik oldalára félköröket illesztünk. Felhasználjuk azt az információt, hogy a pálya hossza 400 méter, tehát a két félkörív és a téglalap hosszabbik oldalai által alkotott síkidom kerülete 400 méter. Jó közelítésnek tűnik, ha ezen síkidom egyenes szakaszait 100 méternek tekintjük, hiszen a pálya egyenes szakaszain futják a 100 méteres sprinteket. Az ábrán ugyan látható, hogy ezek a sávok meg vannak hosszabbítva, de erre azért lehet szükség, hogy a sprint után a versenyzők még lendületben vannak, és helyre van szükség a lelassuláshoz.

Ezt a modellt használva a két félkörív együttes hossza 200 méter. Ebből a körök sugarára a következőképpen következtethetünk:

$$K = 2r\pi = 200\text{ m}$$
$$r \approx 31,8\text{ m}$$

Tehát a téglalap rövidebb oldala körülbelül 63,6 méter.



5.11. ábra

*Megj.: Ennek a számításnak a helyessége ellenőrizhető a felülnézeti kép segítségével, ahol a téglalap hosszabbik és rövidebbik oldalának aránya körülbelül 3:2. Ennek a fenti modell alapján kapott eredmény hozzávetőleg megfelel.*

A legszélső sáv alakját ismét egy téglalap és két körív összeillesztéseként képzeljük el. A pálya egyenes szakaszait továbbra is 100 méternek tekintjük, de a körívek hossza, azaz a körök sugara nagyobb lesz, mint az előző esetben. Hogy megtudjuk, mennyivel nagyobb a külső sávhoz tartozó körsugár a belsőhöz tartozónál, meg kell becsülni a sávok szélességét. Ehhez a feladatlap képeit használjuk kiindulópontként, és az ott mért hosszúságok arányaiból következtetünk a valós hosszúságokra.

|                                           | A képen | A valóságban |
|-------------------------------------------|---------|--------------|
| A téglalap szélessége                     | 36 mm   | 63,6 m       |
| A 9 sáv együttes szélessége (egy oldalon) | 6 mm    | x            |

Tehát:

$$\frac{36}{6} = \frac{63,6 \text{ m}}{x}$$

$$x \approx 10,6 \text{ m}$$

Ebből egy sáv szélessége  $\frac{10,6}{9} \approx 1,2 \text{ m}$  -nek tekinthető.

*Megjegyzés: Az is elfogadható, ha személyes élettapasztalatukra hagyatkozva a tanulók a sáv szélességét valamilyen 1-1,5 méter körüli értékkel becslik, anélkül hogy számításokat végeznének.*

A sáv szélesség ismertében meghatározhatjuk a külső sávhoz tartozó körsugarat.

$$R = r + 8 \cdot 1,2 = 31,8 + 9,6 = 41,4 \text{ m}$$

$$K = 2 R \pi \approx 260 \text{ m}$$

*Megjegyzés: A sávokhoz tartozó körsugarak egy számtani sorozat elemeinek felelnek meg, ahol az első elem a legkisebb körsugár, azaz  $a_1 = 31,8$  ; a differencia a sáv szélesség, azaz  $d = 1,2$  ; a kilencedik tag pedig a külső sávhoz tartozó sugár, azaz  $a_9 = a_1 + 8d = 31,8 + 8 \cdot 1,2 = 41,4$  .*

Mivel az egyenes szakaszok hossza a két modellben nem változott, ezért a két kör területének különbsége adja a pályák hosszának különbségét:

$$260 - 200 = 60$$

A külső sáv tehát kb. 60 m-rel hosszabb, mint a belső. A rajtvonalakat például felfesthetjük

úgy, hogy ezt a különbséget 8 egyenlő részre osztjuk, és az egyenes szakaszon úgy húzzuk a rajtvonalakat, hogy mindenki ennyivel előrébb indul, mint az eggyel beljebb futó versenyző.

*Megjegyzés: Nem csak a sávokhoz tartozó körsugarak, hanem velük együtt a kerületek (azaz a sávok hossza) is számtani sorozatot alkot, így ez a megközelítés teljesen helytálló.*

## 2. megközelítés

A második megközelítésben a futósávok hosszának számolásához pályát egyszerűen kör alakúnak tekintjük.

Ekkor a belső kör kerülete vehető 400 méternek, a többi pályát pedig koncentrikus körnek tekintjük. A sávok szélességét a fentihez hasonló módon becsüljük.

Ebben a modellben a belső kör sugara a következőképp számolható:

$$K = 2r \cdot \pi = 400$$
$$r = \frac{400}{2\pi} \approx 63,7 \text{ m}$$

Tekintsük a sávok szélességét ismét 1,3 méternek. Ekkora a külső futópálya hossza:

$$R = 63,7 + 8 \cdot 1,2 \approx 73,3$$
$$K = 2 R \pi \approx 460 \text{ m}$$

A belső és külső sáv hosszának különbsége tehát körülbelül 60 méter.

A rajtvonalak felfestésekor érdemes ismét figyelembe venni, hogy a pályának a valóságban van egyenes szakasza.

$$60:8 \approx 7,5$$

Ezen a részen érdemes egymás mögé felfesteni a rajtvonalakat 7,5 méterenként úgy, hogy a legkülső pályán induló futó legyen a legelőrébb.

*Megjegyzés: Látható, hogy a két modellel egymáshoz nagyon közeli értékeket kaptunk, és mindkettő tekinthető a valóság jó közelítésének.*

## 9-10.osztály

### 1. megközelítés

A feladatban arra vagyunk kíváncsiak, hány néző férhetett a stadion első sorában. Ehhez az első sor hosszára lesz szükségünk, illetve arra, hány szék férhetett el ezen a hosszúságon. Tehát a stadion „belső kerületét” kellene megközelítőleg megadni, majd megbecsülve, mekkora helyigénye van egy ülőhelynek, kiszámolni hány darab fér belőle ebbe a sorba.



A stadion „belső területének” alakja ellipszisre emlékeztet, azonban az ellipszis területére vonatkozó ismeretekkel nem rendelkeznek a 9-10. osztályos tanulók, így valamilyen más egyszerűbb modellre lesz szükség. A futópálya alakjához könnyebb megfelelő modellt találni, hiszen az két szakasszal és két körívvel jól közelíthető, ezért ezzel fogjuk közelíteni az első sor alakját is.

Tudjuk, hogy a legbelső sáv hossza 400 méter, illetve hogy összesen 8 sáv van felfestve. A stadion belsejéről készült fénykép pedig arra enged következtetni, hogy körülbelül még 7-8 ilyen sáv elférne.

Használható ugyanaz a modell, amely a 7-8. osztályos feladat megoldásában is, melyben a pályát egy téglalap és két félkör együttesének tekintjük. Az egyenes szakaszokat tehát 100 méternek vehetők, így a körívek sugarára hozzávetőleg 31,8 métert kapunk.

A képen lemérhető a téglalap rövidebb oldalának hossza és a futósávok együttes szélessége, majd hasonlóság segítségével megkapjuk, hogy a kilenc futósáv együttes szélessége a valóságban körülbelül 10,6 méter, egy sáv tehát hozzávetőleg 1,2 méter.

A modellben azt feltételezzük, hogy még 8 ilyen sáv elférne a stadionban. Ezzel a „kibővített futópályával” közelítjük a stadion első sorának alakját. Ez egy téglalap és két körív egyesítéseként előállított síkidom, melynek egyenes szakaszai 100 métereseek, a körívek sugara pedig a következőképp számolható:

$$R = 31,8 + 17 \cdot 1,2 = 52,2 \text{ m}$$

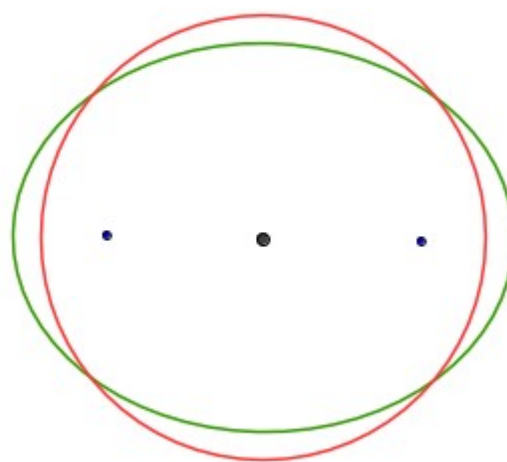
$$K_{\text{kör}} = 104,4 \pi \approx 328 \text{ m}$$

$$K_{\text{stadion}} \approx 528 \text{ m}$$

Ha egy ülőhelyet kb. 80 cm szélesnek tekintünk, akkor az alábbi módon számolható az első sor férőhelyeinek száma:  $52800:80 \approx 660$ .

Azaz e szerint a modell szerint 660-an nézhették első sorból az olimpiai versenyszámokat a stadionban.

*Megjegyzés: Ha jobban megfigyeljük a képeket, hogy az első sor nem teljesen összefüggő, hiszen vannak „rések”, azaz ajtók, ahol a sportolók és egyéb illetékesek a pályára vonulhatnak. A rések hosszának levonásával akár még tovább pontosítható a számolás.*



5.12. ábra

## 2. megközelítés

A második megközelítésben a felülnézeti képen látható zöld téglalap alakú pálya méreteiből indulunk ki, majd a stadion alakját körrel modellezzük.

A téglalap hosszabbik éle körülbelül 100 méternek vehető, mert ez megfelel a futópálya 100 méteres sprintfutásokra szolgáló szakasza hosszának. A téglalap hosszabb és rövidebb oldalának hossza a kép alapján körülbelül 3:2 arányban aránylik egymáshoz. Így tehát a

$$\text{rövidebb oldal} \quad 100 \cdot \frac{2}{3} \approx 67 \quad \text{méter.}$$

A következő lépésben az ellipszis kis- és nagytengelyének hosszát becsüljük, majd ezeknek a számtani közepét tekintjük a modellként használt kör átmérőjének:

$$\frac{\text{rövidebboldal}}{\text{kistengely}} = \frac{1}{2} \quad \text{kistengely hossza} \approx 134 \text{ m}$$

$$\frac{\text{hosszabboldal}}{\text{nagy tengely}} = \frac{24}{45} \quad \text{nagy tengely hossza} \approx 187,5 \text{ m}$$

$$d = \frac{134 + 187,5}{2} = 160,75 \text{ m} \quad r = \frac{160,75}{2} \text{ m}$$

A kör kerülete ekkor:

$$K = 160,75 \pi \approx 505 \text{ m}$$

A székek szélességét 80 cm-nek tekintjük.

$$50500 : 80 \approx 631$$

Tehát 631 férőhely lehetett az első sorban.

## 3. megközelítés

A harmadik megközelítésben nem ismert alakzatokkal próbáljuk közelíteni a stadion alakját, hanem az ismert hosszúságokra és kerületekre helyezzük a hangsúlyt. Tudjuk például, hogy a futópálya hossza 400 méter. Kis körzőnyílás vagy cérna segítségével is megmérhetjük közelítőleg, hogy ez a terület a fényképen mekkorának látszik. Illetve ugyanezzel a módszerrel közelítőleg megmérhetjük a stadion „belső területét” is a képen. Kihasználjuk a valósággal vett hasonlóságot, és a megfelelő hasonlósági arányokkal számolva eljutunk a

stadion valós belső területének becsléséhez. Végül már csak annak meghatározására van szükség, hány szék fér el ezen a területen.

|                          | Valóságban | Képen körzővel mérve |
|--------------------------|------------|----------------------|
| Pálya kerülete           | 400 m      | 8 cm                 |
| Stadion „belső kerülete” | X          | 11,5 cm              |

Ebből:

$$x = \frac{11,5}{8} \cdot 400 = 575 \text{ m}$$

Az eddigiekhez hasonlóan itt is 80 cm-esnek tekintve egy ülőhelyet:

$$57500:80 \approx 719$$

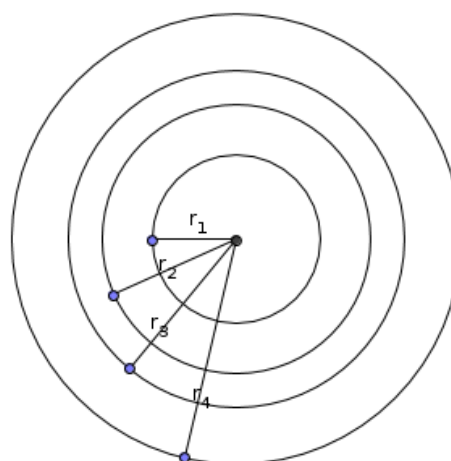
Ebben a megközelítésben tehát azt az eredményt kapjuk, hogy több, mint 700 férőhelyes volt az első sor.

*Megjegyzés: A három megközelítésből származó eredményeket összevetve azt mondhatjuk 600-700 ember ülhetett az első sorban. Ez reálisnak tűnik figyelembe véve, hogy a stadion teljes kapacitása 80 ezer fő, és a képek alapján ez nagyon sok (kb. 70-80) sorban oszlik el, ahol a felfelé haladva a sorokban egyre több ember fér el.*

### 11-12.osztály

A feladat szövegéből ismerjük a stadion alsó szintjének befogadóképességét, a képek és a makett segítségével kellene olyan összefüggéseket találni, amelyek segíthetnek a felső két szint férőhelyei számának megbecslésében.

Mint már említettük, a stadion alakja ellipszisre emlékeztet, de az ellipszis alakzatról kevés ismerettel rendelkeznek a középiskolás tanulók, ezért egyszerűbb modell választására van szükség. Egy egyszerűsített modellben a stadion alakját kezelhetjük körként, és a nézőtér szintjeit pedig körgyűrűkként. A



5.13. ábra



beférő nézők számát tekinthetjük arányosnak a körgyűrűk területének arányával. Ennek az arálynak a kiszámításához azonban szükség van a körgyűrűk vastagságára. Az egyes körgyűrűk vastagságainak arányát közelíthetjük a stadion megfelelő szintjein található széksorok számával.

A stadion alakjának körrel való közelítéséhez használjuk a stadion hosszát és szélességét. Ehhez először mérjük le a térképen az ellipszis kis- és nagytengelyét, majd a hasonlóságra vonatkozó ismereteinket használva állapítsuk meg a valós hosszt.

|                    | A képen | A valóságban |
|--------------------|---------|--------------|
| Arányjelző szakasz | 12 mm   | 50 m         |
| Hosszabb tengely   | 48 mm   | 200 m        |
| Rövidebb tengely   | 36 mm   | 150 m        |

Ennek felhasználásával a kör átmérőjét vegyük  $d=175\text{ m}$  -nek, sugarát pedig  $r=87,5\text{ m}$  -nek.

A következő lépésben foglalkozhatunk a körgyűrűkkel. A három körgyűrű együttes vastagságának becslésében ismét a térkép segít. A képen ez 18 mm-nek mérhető, a valóságban tehát körülbelül 75 méter. Szükségünk lesz még a körgyűrűk külön-külön mérhető vastagságára és a területükre. Utóbbihoz az alábbi területképlet használható:

$$T=(R^2-r^2)\pi$$

Tehát a gyűrűk területének kiszámolásához összesen négy sugárra lesz szükségünk. Ha a gyűrűk vastagságát a sorok számával arányosnak tekintjük, akkor a sugarak hosszát is meg tudjuk határozni. A maketten megszámlálható, hogy az alsó szinten 24, a középsőn 12 és a legfelsőn pedig 26 széksor található. A vastagságok aránya tehát 24:12:26, melyből kerekítés után a következő értékeket kapjuk: 29 m, 14,5 m, 31,5m. Ebből számolható a szükséges négy sugár:

$$r_1=87,5 \quad r_2=116,5 \quad r_3=131 \quad r_4=162,5$$

Ezek felhasználásával a három körgyűrű területe:

$$T_1=5916\pi$$

$$T_2=3588,75\pi$$

$$T_3=9245,25\pi$$

Végül felhasználjuk az információnkat az alsó szint férőhelyeinek számáról, és arányos következtetéssel meghatározzuk a másik két szint befogadóképességét:

$$\frac{25000}{5916} = \frac{x}{3588,75}$$

$$x \approx 15165$$

A második szinten tehát 15165 férőhellyel számolhatunk.

$$\frac{15165}{3588,75} = \frac{y}{9245,25}$$

$$y \approx 39068$$

Az értékeket ezresre kerekítve tehát azt mondhatjuk, a stadionba még körülbelül 54 ezer ember fért be az olimpia ideje alatt.

Az érték a valóságnak jó közelítése lehet, mert szabad szemű becslés alapján is legalább az alsó szint dupláját várhattuk eredményül.

*Megjegyzés: Az interneten utánajárva kideríthető, mennyire pontosan számoltunk. A stadionról szóló cikkek szerint a felső két szint körülbelül 55 ezer befogadására volt képes, tehát modellünk igen jó közelítést adott.*

### 5.1.3.2. Második feladat

A 2. feladat megoldásához fel kell térképezni milyen összefüggések lehetnek az évek múlása, az olimpiai résztvevők száma, valamint esetlegesen a népességszám között. Látható, hogy összességében az olimpiai résztvevők száma növekvő tendenciát mutat, de több visszaesés is megfigyelhető. (Ezek feltehetőleg politikai és gazdasági okokra visszavezethetők.) A növekedésre vonatkozóan sokféle feltételezésünk lehet, közelíthetjük lineárisan vagy exponenciálisan, de figyelembe vehetjük, hogy az elmúlt néhány olimpián már nem volt jelentős különbség a résztvevők száma között. Valamint érdemesnek tűnik a résztvevők népességszámhoz viszonyított arányát is figyelembe vennünk a megoldáskor.

#### Lineáris közelítések

|                                                     |                                      |                                      |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Résztvevők száma 1896-ban                           | 241                                  | 241                                  |
| Résztvevők száma 2012-ben<br>(26 olimpiával később) | 10500                                | 10500                                |
| Átlagos növekedés                                   | $\frac{10500 - 241}{26} \approx 395$ | $\frac{10500 - 241}{29} \approx 354$ |
| 2016-ra várható                                     | $10500 + 395 = 10895$                | $10500 + 354 = 10854$                |
| 2112-re várható<br>(25 olimpiával később)           | $10500 + 25 \cdot 395 = 20375$       | $10500 + 25 \cdot 354 = 19350$       |

*Megjegyzés: A második oszlopban az átlagos növekedés kiszámításánál figyelembe vesszük, hogy a világháborúk alatt összesen 3 olimpia elmaradt.*

|                                                |                                       |
|------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Résztevők száma 1912-ben                       | 2407                                  |
| Résztevők száma 2012-ben<br>(100 évvel később) | 10500                                 |
| Évi átlagos növekedés                          | $\frac{10500 - 2407}{100} \approx 81$ |
| 4 évenkénti átlag                              | $4 \cdot 81 = 324$                    |
| 2016-ra várható                                | $10500 + 324 = 10824$                 |
| 2112-re várható                                | $10500 + 81 \cdot 100 = 18600$        |

#### Exponenciális közelítés

|                                                |                                                            |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Résztevők száma 1912-ben                       | 2407                                                       |
| Résztevők száma 2012-ben<br>(100 évvel később) | 10500                                                      |
| Évi átlagos növekedés                          | $q^{100} = \frac{10500}{2407} \rightarrow q \approx 1,015$ |
| 4 évenkénti átlag                              | $q^4 \approx 1,061$                                        |
| 2016-ra várható                                | $10500 \cdot 1,061 \approx 11140$                          |
| 2112-re várható                                | $10500 \cdot q^{100} \approx 45804$                        |

#### Más megközelítés

Induljunk ki abból, a teljes népesség hányad része (vagy hány százaléka) vett részt az olimpián 1912-ben és 2012-ben. Tegyük becslést a népességnövekedésre, és ennek arányában fejezzük ki a résztvevők lehetséges számát.

|      | Népesség     | Olimpiai résztvevők | arány                                                   |
|------|--------------|---------------------|---------------------------------------------------------|
| 1912 | 1,6 milliárd | 2407                | $\frac{2407}{1,6 \cdot 10^9} \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$ |
| 2012 | 7 milliárd   | 10500               | $\frac{10500}{7 \cdot 10^9} \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$  |

A két évben a résztvevők népességhez viszonyított aránya meglepően közel volt egymáshoz. A következő lépésben exponenciális becslést adunk a népességnövekedésre az évek függvényében. Azonban itt sem szabad elfelejteni, hogy a növekedés tempójának lassulnia kell, hiszen ha túlszaporodik az emberiség, egyszerűen nem lesz képes fenntartani

magát.

$$a_0 = 1,6 \cdot 10^9$$

$$a_{100} = a_0 \cdot q^{100} = 7 \cdot 10^9$$

$$q^{100} = 4,375 \rightarrow q \approx 1,015$$

Tehát 4, illetve 100 év múlva a várható népességszám a következőképpen alakul:

$$a_{104} = 1,6 \cdot 10^9 \cdot 1,015^{104} \approx 7,5 \cdot 10^9$$

$$a_{200} = 1,6 \cdot 10^9 \cdot 1,015^{200} \approx 31,4 \cdot 10^9 = 3,14 \cdot 10^{10}$$

Az olimpiai résztvevők száma ebből következőképpen számolható:

$$7,5 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} = 11250$$

$$3,14 \cdot 10^{10} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} = 47100$$

Ezzel a közelítéssel a 2016-ban várható résztvevőszám 11250 fő, a 2112-ben pedig 47100 fő.

*Megjegyzés: A tanulók hallhattak már róla, hogy a népességszám növekedése exponenciális függvényhez közelít, erre alapozhatják ezt a közelítést. Ha lineáris közelítést használnak, akkor pedig a fenti lineáris közelítésekhez hasonlóan 18-20 ezer fő közötti eredményhez jutnak, hiszen az olimpiai résztvevők és a népesség számának megközelítőleg állandó arányából indultunk ki.*

A következő olimpiára vonatkozóan a 10-11 ezer fő közötti becslések reálisnak mondhatók. A 100 évvel későbbire vonatkozóan nehéz döntést hozni: az olimpiai sportágak száma, valamint az egyes sportágban nevezhető versenyzők száma az évek során nagyjából kialakult és állandósult, valamint erre vonatkozóan a Nemzetközi Olimpiai Bizottság szabályokat is alkot. Azonban ezeknek a szabályoknak minden bizonnyal igazodnia kell a Föld lakosságához is. A tudósok véleménye szerint a népességnövekedésnek lassulnia kell, tehát 100 év múlva nem érheti el a Föld lakosságának száma a 31 milliárdot, tehát ha az olimpiai indulók száma tartja is az arányt a népességszámmal, akkor sem éri el a 45 vagy 47 ezres becslést.

## 5.2. A tanulók

A feladatlapokat egy kecskeméti nyolcosztályos gimnázium tanulói oldották meg 2012 őszén. Személyesen nem tudtam jelen lenni a dolgozatok megíratásakor, az iskola tanárai vitték be azokat egy-egy órájukra, akik írásbeli tájékoztatást kaptak teendőikről.

Az eredeti elképzelés az volt, hogy a 7-12. évfolyamokról egy-egy osztály fogja kitölteni feladatokat, azonban ennél valamivel kevesebb tanuló tudott csak részt venni a kísérletben. Egyrészt, mert a 12. osztályos tanulók a közelgő szalagavató és érettségi miatt nem tudtak időt szakítani a feladatlap megírására, másrészt a kitöltés időpontjában a 9. osztálynak csak a fiú tanulói tudtak jelen lenni. Valamint sajnos a 7.osztályos tanulók egy része véletlenül az idősebb évfolyam dolgozatát kapta, így az ő munkáikat nem tudom a többiekével együtt értékelni.

A gimnáziumban 7. osztálytól kezdődően választható az emelt szintű matematika csoport , ahol a tanulóknak heti 5 matematika órájuk van, és több időt szánnak versenyfeladatok megoldására is. 11.osztálytól kezdődően pedig matematika fakultáció választható, ahol a tanulóknak heti 6 matematika órájuk van, és felkészülhetnek az emelt szintű érettségire is.

Az iskola igazgatóhelyettese elmondta, a hetedik és nyolcadik osztályosok most elég nehezen kezelhető korszakukat élik. Ez valamelyest megnyilvánulhat a feladatmegoldásban tanúsított hozzáállásukban is.

A kilencedik osztályos tanulók tűntek a legmotiváltabbnak, míg a velük azonos feladatlapot kitöltő 10.osztályosok alacsony lelkesedése volt megfigyelhető.

Az iskolában egyébként is népszerűnek számít a matematika tantárgy, sokan választanak emelt szintet, és gyakoriak a kiemelkedő versenyeredmények is.

Az alábbi táblázat mutatja a vizsgálatban résztvevő tanulók számát kor, nem és matematika csoport szint szerinti bontásban:

|                   | Nem |      | Szint |       | összes | Korcsoport összesítés |
|-------------------|-----|------|-------|-------|--------|-----------------------|
|                   | Fiú | Lány | alap  | emelt |        |                       |
| <b>7. osztály</b> | 14  | 9    | 11    | 12    | 23     | 52                    |
| <b>8. osztály</b> | 18  | 11   | 7     | 22    | 29     |                       |
| <b>9.osztály</b>  | 21  | 0    | 5     | 16    | 21     | 49                    |
| <b>10.osztály</b> | 12  | 16   | 8     | 20    | 28     |                       |
| <b>11.osztály</b> | 10  | 13   | 14    | 9     | 23     | 23                    |

### 5.3. A dolgozatban használt vizsgálati módszer

A dolgozat célja információk gyűjtése olyan tanulók modellezési kompetenciájáról, akik oktatásában nem fektettek külön hangsúlyt a modellezési folyamat megismerésére és elsajátítására az oktatásban.

Riebel (2010) említi, hogy ha a modellezési folyamat egészének megfigyelése a cél, akkor célravezető lehet az a módszer, hogy a feladatokban az egyes végrehajtott lépésekre kapnak pontot a diákok. Ennek a megfigyelési módszernek van néhány buktatója. Például, ha egy tanuló tévesen értelmezi a valós szituációt, akkor téves modellt fog hozzá készíteni. Tehát ha valaki az elején hibázik, a további lépései sem lesznek helyesek a megoldás tekintetében.

Ezen a ponton, hasonló koncepciót alkalmazok, mint az érettségi feladatok javításánál szokás. Ha egy tanuló hibázik egy lépésben, de a hibás feltételezéssel jól folytatja a feladat megoldását, akkor megkapja a pontot a feladatrészekre. Tehát *elsősorban arra vagyok kíváncsi, hány lépést tudnak végrehajtani a modellezési folyamatból, és melyek ezek - függetlenül attól, hogy a lépések tökéletes eredményre vezetnek-e vagy sem. Azért nem vizsgálom a modell megfelelőségét, mert a modellezési folyamat nem feltétlenül ér véget az első modellnél, hanem az eredmények függvényében újra meg újra lefolytatható, erre azonban nyilvánvalóan nem lett volna idő a jelenlegi felmérésnél.* Fontos megemlíteni, hogy mivel itt a modellezési folyamat lépései hangsúlyosak, pontot ér a matematikai számolás lépése is.

A modellezési kompetencia vizsgálatakor azonban a matematika és a valós világ közötti kétirányú fordítási folyamaton van a hangsúly, ezért ezt a két lépést részletesebben is fogom vizsgálni. Azaz hogyan transzformálták a valós problémát matematikai problémává, és hogyan értelmezték a kapott eredményt. Ezen lépések helytállóságával kapcsolatos megjegyzéseimet külön részben foglalom össze.

### 5.3.1. A vizsgált szempontok

Az első vizsgálati szempont a fentieknek megfelelően az, hogy az egyes modellezési lépések mennyire vannak jelen a tanulók munkáiban.

A vizsgálatban a következő lépések meglétét vizsgálom:

1. A valós probléma matematikai problémává alakítása.
2. A matematikai probléma megoldása.
3. A matematikai eredmény valós eredménnyé alakítása
4. A valós eredmény értékelése.

A feladatok megfogalmazásában külön kértem a tanulókat, írják le, hogyan gondolkodtak. Ez a vizsgálat szempontjából fontos lett volna, hogy nyomonkövethető legyen minden egyes modellezési lépés, amit megvalósítanak. Azonban a felszólítás ellenére gyakoriak voltak a rövid, egy-két mondatos válaszok. Ha ezekből egyértelműen kiderült, milyen modell alapján számoltak, akkor kaphattak pontot az első három lépésre, hiszen a gondolkodásukban megjelent valamilyen matematikai modell, számoltak is vele, de a papírra már csak a matematikai eredmény valós értelmezése került.

Volt néhány különleges eset, ahol a tanuló matematikai modellt egyáltalán nem hozott létre, így nem is számolt vele, de az elképzelhető eredmények értelmezéséről annyira részletesen írt, hogy a 3. vagy 4. lépésnek tudtam be.

A modellezési lépések megjelenésének vizsgálata után többféle összehasonlítást végeztem adott tanulócsoportok között. A megfigyelésekhez elsősorban a tanulók lépésszámainak (súlyozott) számtani közepét használtam, mert ez az egyes csoportok átlagos teljesítményét jól kifejezi és összehasonlíthatóvá teszi. Egyes esetekben korrelációs együtthatót és szórást is számolok, hogy pontosabb képet kapjak a tanulók eredményeiről.

Ahogy a feladatválasztás szempontjainál is leírtam, a feladatlapokra kétféle feladattípus is került éppen azért, hogy a különböző típusokban mutatott teljesítményt össze tudjam hasonlítani.

Már a kísérlet tervezésekor is tudtam, melyik iskolában fogják kitölteni a tanulók a feladatlapokat, így tudtam azt is, hogy minden osztályban van alap- és emelt szintű csoport is. Ezért a feladatlapok fedőlapján jelölniük kellett a tanulóknak, melyik csoportba járnak, így a kétféle szint között is összehasonlítást tudtam végezni.

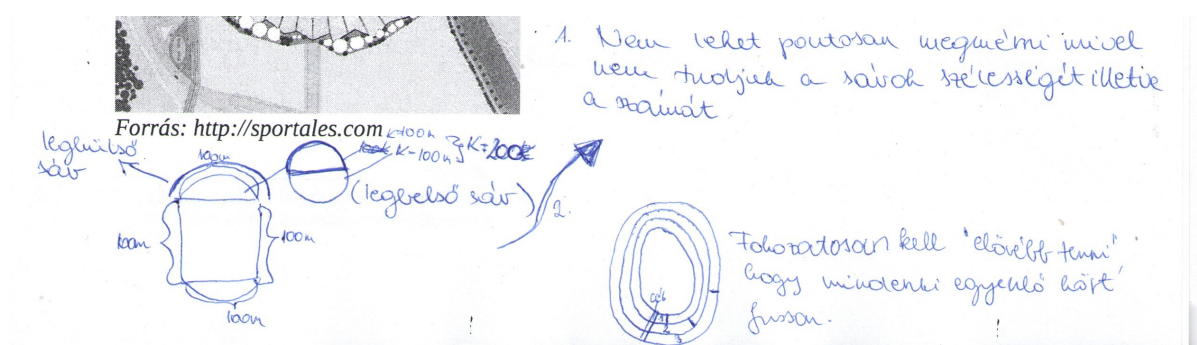
## 5.4. Eredmények

### 5.4.1. A modellezési lépések

A modellezési lépések vizsgálatában lépésenként haladok, és úgy mutatom be, milyen arányban jelennek meg a tanulók munkáiban, néhány konkrét példával.

Összesen 124 dolgozatot vizsgáltam meg. Ebből 42 tanulónál szerepelt modellalkotás - tehát az 1. lépés - mindkét feladat megoldásában, 60-an készítettek modellt az első, míg 89-an a második feladathoz. A diákok 88%-a, azaz 110 tanuló készített legalább az egyik feladat megoldásához modellt.

*Megjegyzés: Sok tanuló meglátta, milyen információkra lenne szüksége egy matematikai modell kialakításához, azonban feladta a folytatást, mondván ezek az információk nem állnak rendelkezésre. Az 5.14. ábrán erre látható példa.*



5.14. ábra

A második modellezési lépés nagyon erősen kötődik az elsőhöz, ezért nyilván nem találkozhatunk olyan megoldással, ahol a 2. lépés jelen van, de az első nincs. Az összesen vizsgált 248 feladatmegoldásból, 149 helyen szerepelt valamilyen modell. Ezek közül 143 darab megoldásban számoltak is a modellben. Ez azt jelenti, hogy az esetek 96%-ában társult a matematikai feladatmegoldás a megalkotott modellhez.

A második és a harmadik lépés szintén erőteljesen egymásra épül, hiszen ha nem végzünk számolásokat a matematikai modellben, nem juthatunk matematikai eredményhez, amit értelmezhetnénk. Összesen a tanulók 71 %-a adott értelmezést a matematikai megoldáshoz legalább az egyik feladatban, 31%-uk pedig mindkét feladatban.



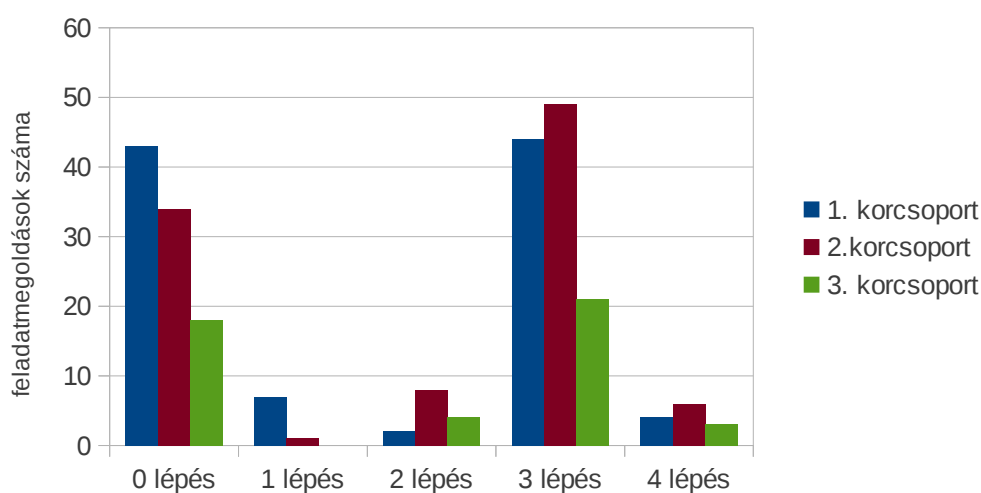
olimpiának! Írd le, hogyan gondolkodtál! <sup>Véleményem szerint a következő</sup>  
 olimpián résztvevő száma nem nagyon fog emelkedni  
 30-40 ezer körül lesz a résztvevő csak úgy  
 mint idén. 1912-2012-ig a résztvevő száma  
 majdnem 50X-szere nőtt. A 100 évvel ezelőtti olimpián  
 először mértékben nem fog nőni mivel az elmúlt 100  
 évben hatalmas fejlődés ment át a világon és ezt  
 nem fogja tudni tartani. A résztvevő számát körülbelül  
 20 ezerre becsülöm, mivel ha még több sportot is  
 olimpiai sporttaggal választanak akkor sem fog 50X-szere  
 nőni a létszám.

1 1912-ben a Föld lakossága kb. 1,6 milliárd fő volt.  
 2012-ben a Föld lakossága kb. 7 milliárd fő.

### 5.15. ábra

A negyedik lépés - a valós eredmény értékelése a valós kontextus alapján – jelent meg a legkevesebb munkában. Ennek az is lehet az oka, hogy az eredményüket reálisan értékelők egyszerűen csak leírták azt megoldásként, de nem hangsúlyozták külön, hogy az reális a kiindulási szituációt tekintve.

Leggyakrabban az eredményükben kételkedők írtak valamilyen kommentárt a feladatmegoldás végén, amely az eredmény értékelésének tekinthető, ahogy ez a 5.15. ábrán is látható.



5.16. ábra: Az egyes lépésszámok gyakorisága korcsoportonként

A kiadott 248 feladat megoldásai között mindössze 18 helyen találkozhatunk a megoldás értékelésével. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált feladatmegoldásoknak mindössze 7 %-ában értékelték a tanulók az eredményt.

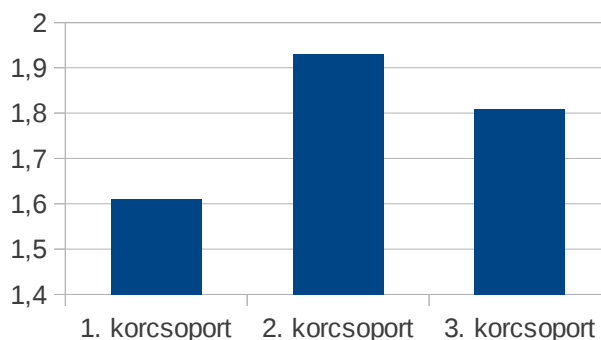
A 5.16.ábrán jól látható, hogy a 3 lépéses és a 0 lépéses modell a leggyakoribb az egyes korcsoportokban.

Azokban a feladatmegoldásokban tehát, ahol létrehoztak valamilyen modellt, többségében 3 lépésig jutottak, általában csak az eredmény értékelése hiányzott. Ennek egy lehetséges oka, hogy a tanulóknak jól rögzült a hagyományos szöveges feladatok megoldási algoritmus, miszerint az adatok kigyűjtését követi a matematikai számolás, végül pedig szöveges választ kell adni. A 0 lépéses megoldások nagy száma mutatja, hogy sok lapon nem érkezett értékelhető válasz. Ezekben az esetekben többnyire meg sem próbálták megoldani a feladatokat.

## 5.4.2. A különböző korcsoportok eredményei

A feladatlapokat három korosztály számára készítettem, és eredetileg csak ezt a három korcsoportot (1.korcsoport: 7-8.osztály, 2.korcsoport: 9-10. osztály, 3.korcsoport: 11.osztály) szerettem volna összehasonlítani. A dolgozatok eredményei alapján azonban néhány ponton érdemes lehet külön-külön szólni az egy korcsoportba sorolt osztályokról.

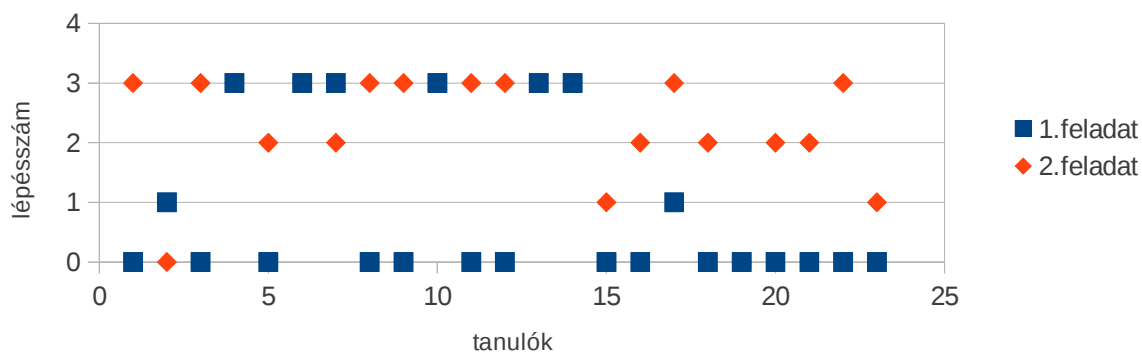
A végrehajtott modellezési lépések számát tekintve a 2. korcsoport teljesített a legjobban átlagosan 1,93 modellezési lépéssel, őket követi a harmadik korcsoport 1,81 lépéssel, a leggyengébb teljesítményt pedig a 7-8.osztályos tanulók nyújtották átlagosan 1,61 modellezési lépéssel. A második csoport jó eredményét a 9. osztálynak köszönheti, akik mindkét feladatban 2 egész feletti átlagos lépésszámot produkáltak, ezzel erősen felhúzva a 10. osztály eredményét is.



5.17. ábra: Átlagos lépésszám korcsoportonként

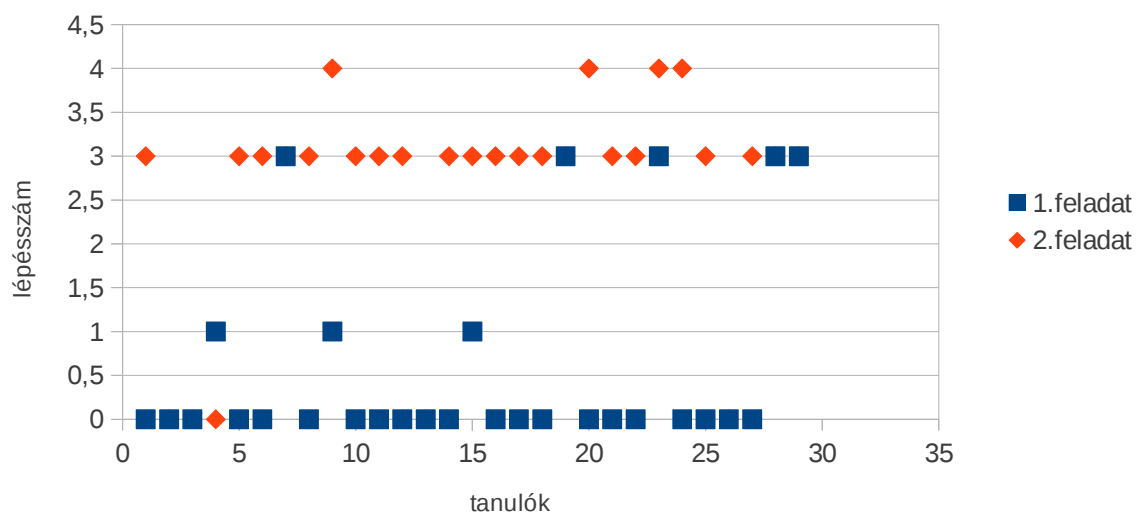
A 5.18-22.ábrákon az egyes osztályok tanulói által produkált lépésszámok láthatók.

### A 7. osztályosok lépésszámai



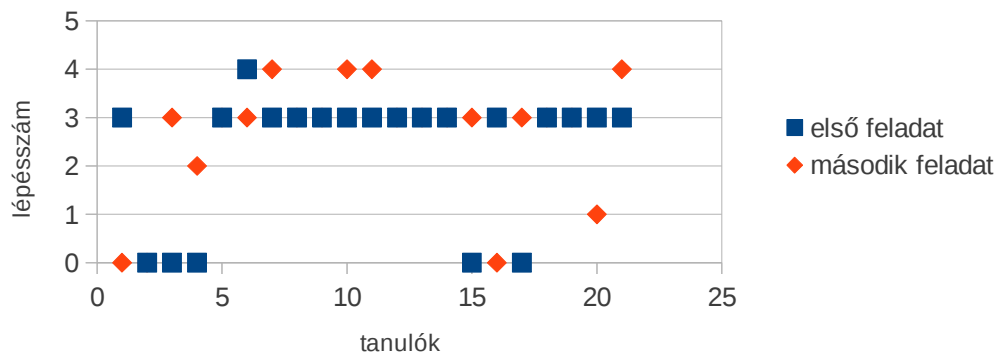
5.18. ábra

### A 8. osztályosok lépésszámai



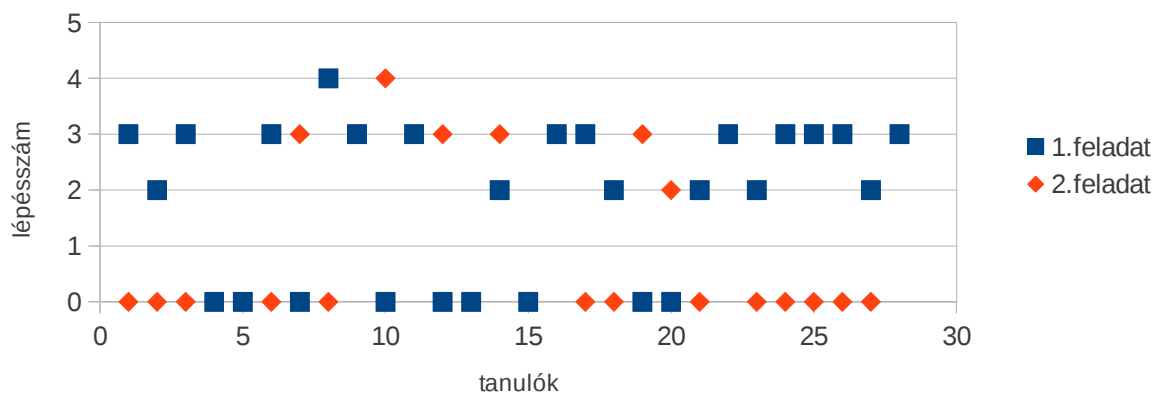
5.19. ábra

### A 9. osztályosok lépésszámai

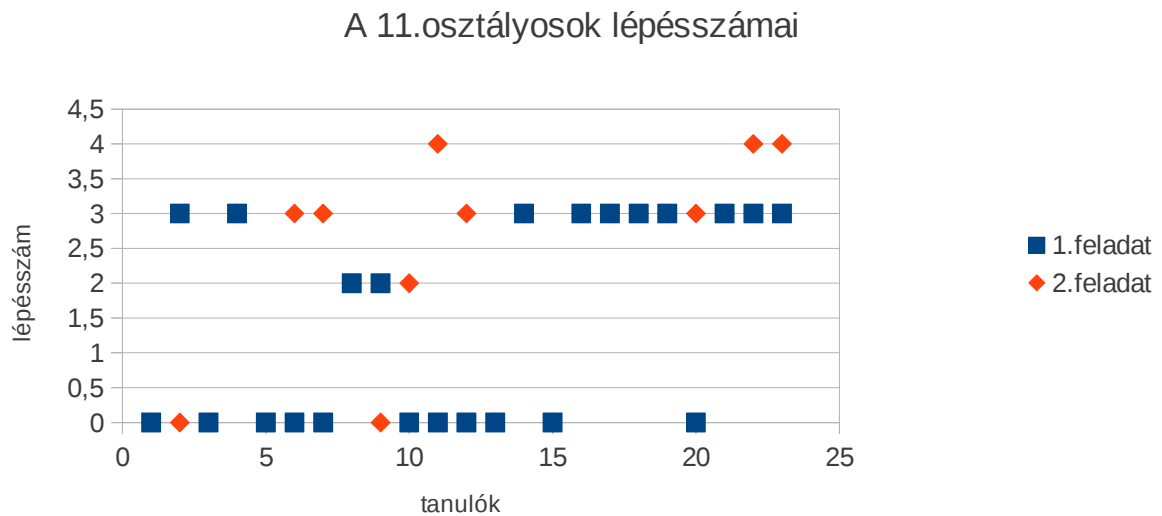


5.20. ábra

### A 10. osztályosok lépésszámai



5.21. ábra



5.22. ábra

Az egyes osztályok tanulóinak feladatonként végrehajtott lépésszámainak tanulmányozva is feltűnő a 9. osztályosok kiemelkedő teljesítménye, ahol öt néglépéses feladatmegoldás is született, és nagyon sok a háromlépéses is, de kevés az ezektől eltérő eredmény. (5.20.ábra) Ezt a szórás értékével is alátámaszthatjuk, mely ebben az osztályban a legalacsonyabb, körülbelül 1,3.

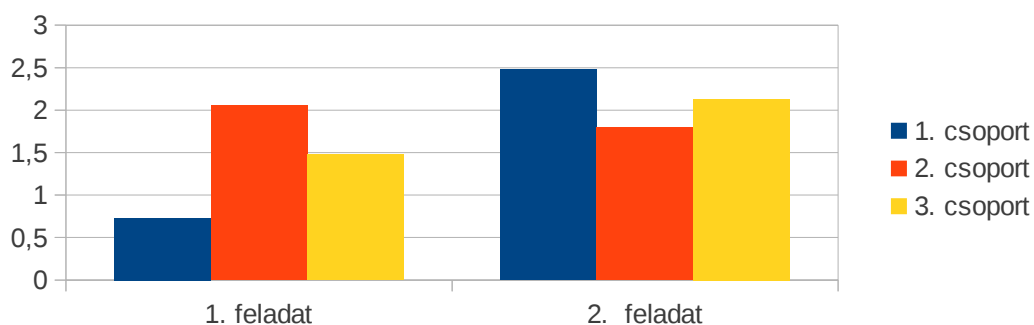
A legnagyobb szórása a 8. és 11. osztályos tanulók eredményének van, mindkét esetben 1,5 fölötti érték. Tehát ezekben az osztályokban térnek el a leginkább az átlagtól az egyes tanulók eredményei.

Az vizsgálatban tehát nem mutatkozott egyértelmű összefüggés a modellezési lépések végrehajtása és a korosztály között. Valószínűleg a tanulók feladatlaphoz való hozzáállása, a feladatmegoldásban tanúsított kitartása is játszott nagyobb szerepet az eredmények alakulásában.

### 5.4.3. Az átlagos lépésszám alakulása

#### 5.4.3.1. A különböző feladattípusok összehasonlítása

Az első feladat minden feladatlapon a Londoni Olimpiai Stadionnal kapcsolatos feladat volt, a második pedig az olimpiai résztvevők számával kapcsolatos.



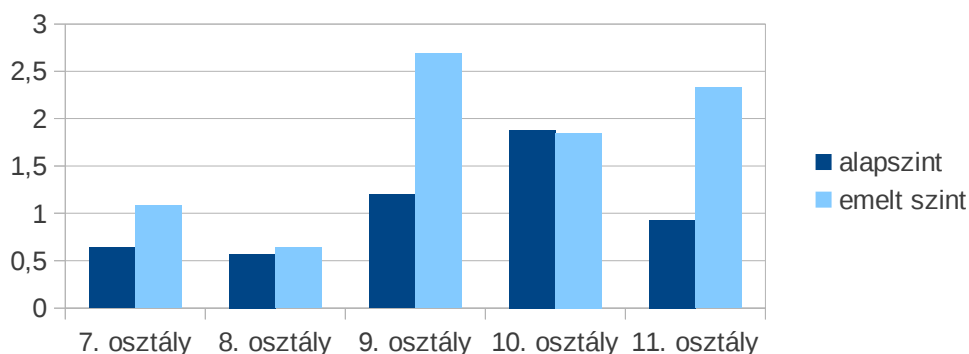
5.23. ábra: Az egyes korcsoportok átlagos lépésszáma feladatonként

Összességében megfigyelhető, hogy a második feladat megoldását többen kezdték el, és átlagban több modellezési lépést is hajtottak végre ebben a feladatban a tanulók. A három korcsoport átlagos lépésszámának súlyozott számtani közepe az első feladat esetében 1,39 volt, míg a második feladat esetében 2,14. A 5.23. ábrán látható, hogy a második korcsoport teljesítménye „ellentmond” az átlagnak. Megfigyeléseim szerint ennek oka, hogy a 10.osztály valamiért inkább az első feladat megoldásával próbálkozott, míg a második feladatot értelmetlennek ítélték, ezért meg sem próbálták megoldani valamilyen matematikai modell segítségével.

Megítélésem szerint a tanulóknak azért ment könnyebben az előrejelző feladat, mert több információ állt rendelkezésükre, amit közvetlenül fel tudtak használni a modell megalkotásához és a számoláshoz, mint az első feladatban, ahol sok adatot a képek alapján kellett vagy lehetett volna megbecsülni.

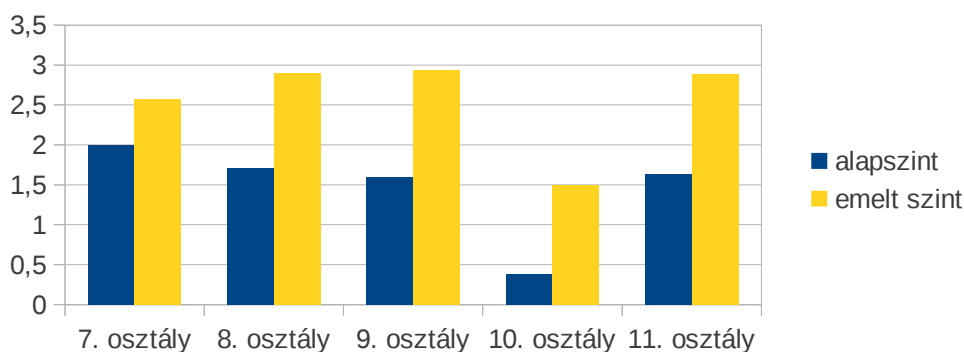
### 5.4.3.2. Alap és emelt szint

Általánosságban elmondható, hogy a matematikát emelt szinten tanulók jobb eredményeket értek el a modellezési lépések számát tekintetbe véve, ahogy ez a 5.24. és 5.25. ábrán is látszik. Ugyanakkor az is elmondható, hogy az első feladatban ők is kevesebb lépést tudtak megtenni.



5.24. ábra: Átlagos lépésszám az első feladatkörben

A jobb teljesítmény hátterében az emelt szintű tanulók nagyobb feladatmegoldó rutinja állhat. Magasabb óraszámuk következtében feltehetően a komolyabb matematikai ismeretek mellett fejlettebb problémamegoldó képességgel is rendelkeznek, ami előnyükre vált a modellezési feladatok megoldása során.



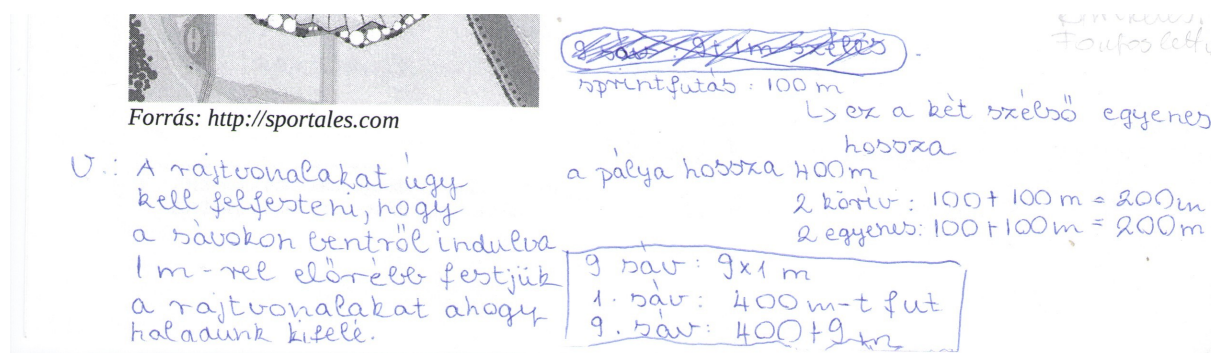
5.25. ábra: Átlagos lépésszám a második feladatnál

#### 5.4.4. Megjegyzések az első és a harmadik modellezési lépésről

A modellezési kompetencia összetevői között az 1. és a 3. lépés kiemelkedően fontos. Ezért miután megvizsgáltam a tanulók munkáiban a megjelenő modellezési lépéseket, kiválasztottam azokat, melyekben az első és a harmadik lépés is megtalálható. Ezután ezeket vettem nagyító alá abból a szempontból, hogy hogyan hajtották végre ezeket a lépéseket, azaz mennyire volt sikeres a modellezés magját adó kétirányú fordítási folyamat a matematika és a valóság között.

A vizsgált tanulók 31%-ánál szerepelt mindkét lépés mindkét feladat megoldásában, illetve 69% munkájában szerepelt mindkét lépés legalább az egyik feladat megoldásában. Ez nagyon jó arálynak tekinthető, hiszen nem járta az ilyen feladatok megoldásában.

Az első feladat megoldásánál minden osztály esetében megfigyelhető, hogy bár sok esetben megjelent valamilyen matematikai modell, az csak ritkán volt pontos, és ritkán vezetett helyesnek mondható eredményhez. A hetedik osztályosok megoldásai között kifejezetten sok olyan modell fordult elő, ahol helytelen összefüggésre támaszkodnak a futópálya szélessége és hossza között. Például a 5.26. ábrán egy olyan dolgozat részlete látható, amelyben a tanuló úgy becsli, hogy a futópályák szélessége 1 méter, majd azt az összefüggést feltételezi, hogy akkor minden pálya 1 méterrel hosszabb a mellette lévőnél. Mivel egy „körszerű” alakzatról van szó, ilyen összefüggést nem feltételezhetünk a két említett mennyiség között.



5.26. ábra



Olyan is előfordult, hogy alapvetően jó elképzelésekkel indultak, de aztán elakadtak a tanulók, mert nem használták ki a képek nyújtotta információkat, kizárólag a szövegre támaszkodtak. Megfigyelhető volt még, hogy az általam leírt lehetséges megoldásokhoz képest a tanulók egyszerűbb modelleket próbáltak keresni, és kissé hasraütés-szerű becsléseket alkalmaztak megfelelő indoklás vagy alátámasztás nélkül. Ilyenre példa a korábbi 5.15.ábra.

A második feladat minden korosztály számára ugyanaz volt, így ennél különösen érdekessé vált a kérdés, megfigyelhető-e valamilyen tendencia az életkor változásával és a használt modellel összefüggésben. A vizsgált megoldások közül 44 lineáris és 20 exponenciális közelítéssel dolgozott. Általában minden osztályban megfigyelhető a lineáris modellek túlsúlya. Kivéve a kilencedik osztályt, ahol 5 lineáris és 10 exponenciális modell született. Ennek oka akár az is lehet, hogy az előző órákon éppen ezzel a témával foglalkoztak. A lineáris és exponenciális közelítés mellett néhány egyéb ötlet is felmerült, de ezek száma elenyésző. Összességében különösebb összefüggés nem mutatkozott az életkor és a használt modellek aránya között. A legtöbb modell jól használhatónak bizonyult a feladat megoldására.

A matematikai eredmények valós eredményként való értelmezésével kapcsolatban elmondható, hogy a tanulók mindkét feladatban a megfelelő eredményt ültették vissza a valós szituációba. Az általuk alkotott modellben tehát céltudatosan dolgoztak, nem közöltek eredményként olyasmit, ami más valós kérdésre lett volna válasz a modell alapján. Megemlítenéd, hogy sok tanuló észrevette, hogy a matematikai megoldás során kapott eredményeket a valós szituációba illesztve elég százas vagy ezres nagyságrendű kerekítéssel válaszolni, hiszen jelen esetben értelmetlen lenne ennél pontosabb becslésekkel próbálkozni.

## 6. Az eredmények szerepe az oktatásban

A dolgozat egy iskola öt osztályának tanulóit tanulmányozza, tehát a felmérés nem tekinthető reprezentatívnak, mégis érdekes információkat hordoz.

Először is elmondható, hogy a tanulók többsége legalább egy modellt létrehozott, és nagyon sokan végrehajtották a modellezési folyamat első három fázisát. A hagyományos szöveges feladatok megoldásából származó rutin tehát segítségükre van a tanulóknak modellezési feladatok megoldása során is. Ezekkel érdemes tehát „bemelegíteni” a modellezési feladatokkal való ismerkedés előtt.

Bár örömteli, hogy ilyen sok munkában megjelennek ezek a lépések, egyúttal fény derült a hibákra is. Például arra, hogy a negyedik lépés, a megoldás értékelése nagy arányban hiányzik a tanulók munkáiból, így a modellezés tanítása során erre a lépésre különösen nagy gondot kell fordítani.

Ha a megoldásokat tüzetesebben is megvizsgáljuk, látható, hogy bár a lépések sok feladatmegoldásban megjelennek, a megoldások leírásának módja és az alkalmazott eljárások precizitása még nagy kívánnivalót maga után.

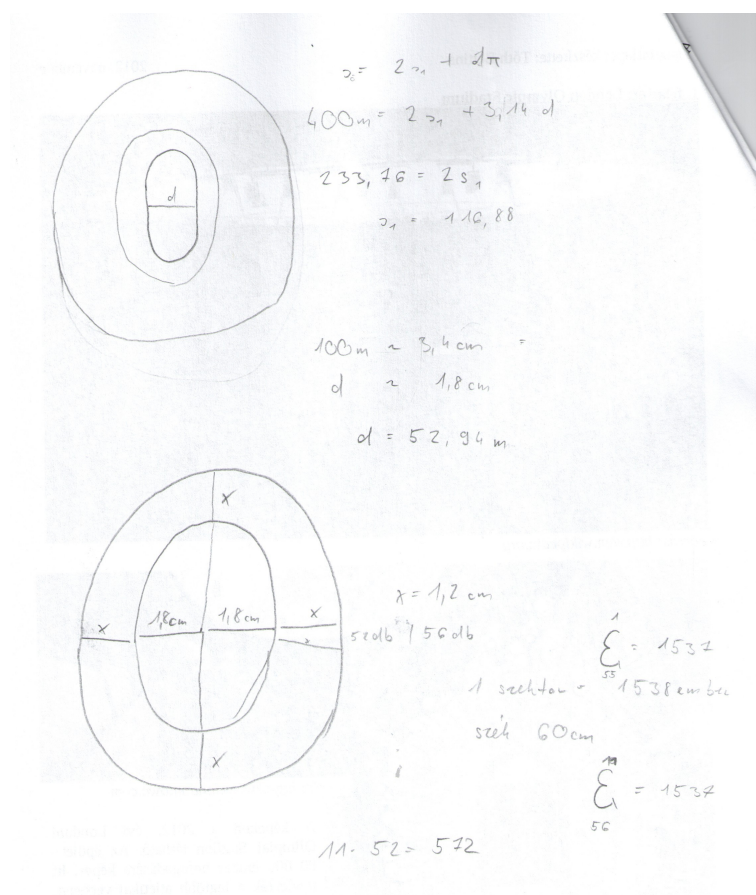
A tanulókat arra kell sarkallnunk, hogy megoldásaik leírására legyenek igényesek, gondolatmenetüket jól követhetően írják le, a szükséges valós információk kiszűrésétől kezdve, a matematikai munkán át, egészen az eredmény bemutatásáig és értékeléséig. Ez a rendezettség a későbbiekben is javukra válik, és a tanári értékelést is megkönnyíti.

Megfigyelhető volt, hogy a tanulók bár nem féltek becsléseket használni, nem kellően indokoltan tették azt. Meg kell tehát tanulniuk, hogy az egyes szituációknak megfelelő pontosságú becslésekre van szükség, és ezeket valamilyen forrással alá kell támasztani.

Ezen a ponton érdemes felhívni a tanulók figyelmét a feladatokhoz kapcsolódó illusztrációkra is, melyek sok esetben segítenek egyes mérőszámok becslésében. Ezt a fajta segítséget ugyanis nagyon kevés esetben használták ki a diákok.

Az 6.1. ábrán látható azon ritka megoldások egyike, ahol a tanuló méréseket végzett a képek alapján. Sajnos azonban nem sikerült eljutnia a teljes megoldásig.

A korcsoportok és az átlagosan végrehajtott modellezési lépések száma között nem mutatkozott összefüggés, ellenben megfigyelhető volt, hogy az emelt szintű tanulók jobban teljesítettek, mint az alapszintűek, valamint az is, hogy általában jobban ment a tanulóknak az előrejelző feladat megoldása, mint a leíró feladaté.



6.1. ábra

Véleményem szerint ez azt mutatja, hogy a modellezés tanításához nem kell arra várni, hogy a tanulók betöltsenek egy bizonyos életkort, hanem bármely korban el lehet kezdeni. Természetesen mindig az adott tanulócsoporthoz kell megfelelő feladatokkal kezdeni, majd fokozatosan áttérni a nehezebb feladatokra. A kétféle feladat megoldásában előállt különbség azt sugallja, hogy először érdemes kevésbé nyitott feladatokat választani, ahol nem hiányzik túl sok információ a feladat megadásában. Az emelt szintű tanulók jobb teljesítménye pedig arra utal, hogy a modellezési kompetencia erősen összefügg más matematikai kompetenciákkal, éppen ezért azokkal együtt lehet és kell is fejleszteni.

## 7. Összefoglalás

A dolgozat az eddigi külföldi tanulmányokra alapozva céljául tűzte ki a magyar tanulók modellezési kompetenciájával való ismerkedést. Saját készítésű feladatlapot alkalmaz, két feladattal, melynek készítésekor lényeges volt, hogy sokféle szempont szerint összehasonlíthatók legyenek majd a tanulók munkái. Ezért kétféle feladattípust oldhatott meg többféle korosztály és kétféle matematikai szintű csoport abban az iskolában, ahol a vizsgálatot végeztem.

A fő kérdés az volt, hány modellezési lépést hajtanak végre a tanulók úgymond megérzésből, azaz anélkül, hogy hallottak volna a modellezési folyamatról. Ezen belül pedig érdekes összehasonlítást kínáltak a fent is említett szempontok: a kor, a feladattípusok és a matematikaszint. Emellett pedig képet kaphattunk a tanulók munkájának minőségéről, az általuk választott modellekről, esetleges hibákról vagy a feladattal kapcsolatos kételyeikről.

A tanulók összességében jól teljesítettek, látható volt, hogy a feladatmegoldásaikban sokan eljutottak a vizsgált négy lépésből háromig, ami azt jelenti, hogy a valós világ és a matematikai világ közötti fordítás végbement a megoldás során. A legnagyobb mértékben az eredmény értékelése hiányzott a munkákból. Már a dolgozat megírása előtt is az a megfigyelés motivált, hogy tanulók ritkán gondolkodnak el azon, mennyire felel meg egy-egy matematika feladat megoldása a valóságnak, vagy legalábbis ritkán adnak hangot ilyen gondolataiknak. A kísérlet pedig igazolta ezt az elképzelésemet, tehát úgy gondolom, jobban tudatosítani kell a diákokban, a matematika és a valóság közötti viszonyt.

Az eredményekből sokféle következtetést levonhatunk a modellezési feladatok tanításával kapcsolatban. Az esettanulmány tanulságai nem általános érvényűek ugyan, de megmutatják, mi az, amit a tanulók már felkészülés nélkül is tudhatnak a modellezésről, és melyek azok a területek, amelyeken a tanulók célzott fejlesztés nélkül nagyobb elmaradásokat mutattak.

A modellezési feladatok számos lehetőséget kínálnak a matematikai kompetencia és részkompetenciái fejlesztésére. Szerepük van a strukturálás és problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében, a világ rendjének megismerésében, a pozitív hozzáállás kialakításában. Ezért szerepet kell kapniuk a hétköznapi matematikaoktatásban mind az általános, mind a középiskolákban.

További módszertani kutatásokat is érdemes lenne végezni a modellezési feladatokkal és a modellezési kompetenciával kapcsolatban, felhasználva ennek a dolgozatnak az eredményeit is, hiszen Magyarországon még igen keveset tudunk a témáról. Ezekből említenék néhányat munkám zárásaként.

Például a vizsgálati módszerek között említett multiple-choice módszerrel remekül kutathatók lennének az egyes modellezési kompetenciák különálló egységként is, nem csak egy modellezési folyamat részeként.

A tanulóknak a vizsgálatban szereplő feladatokhoz fűződő kérdése is érdekes vizsgálat tárgyát képezhetné, akár egy hosszabb kísérletben is.

Kérdőívek és interjúk segítségével választ kaphatunk a tanulók előzetes hozzáállásáról a modellezési feladatokhoz, majd később újabb teszt során megtudhatnánk, hogyan változtak érzéseik a feladatokkal való ismerkedés során. Vizsgálható esettanulmányként egy-egy tanuló modellezési feladat megoldása közben vagy akár fejlődésük is hosszabb távon ebben a témában.

## **Irodalomjegyzék**

- Ambrus G.: Valóságközelebbi matematika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007
- Ambrus G.: Modelllezési feladatok a matematikaórán. Matematika – Tanári Kincsestár, 1-25 RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft, Budapest, 2007
- Ambrus G.: Titanic a Balatonon és más modellezési feladatok matematikából, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2012
- Blum, W.: Kann mathematisches Modellieren selbständig gelernt werden? Ergebnisse aus der Lehr-/Lernforschung, Paderborn, 2010
- Blum, W.: Mathematisches Modellieren – Zu schwer für Schüler und Lehrer?, Kassel, 2007
- Blum, W. - Drüke-Noe, C. - Hartung, R. - Köller, O.: Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen, Cornelsen Verlag, Berlin, 2010
- Greefrath, G.: Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben, Aulis Verlag, Köln, 2007
- Greefrath, G.: Prozessanalysen von Modellierungsaufgaben, Wuppertal, 2006
- Jahnke, T.: Kleines Aufgabenbrevier – Zur Klassifizierung von Aufgaben im Mathematikunterricht, Potsdam, 2001
- Leiß, D. - Blum, W.: Modellierungskompetenz – Vermitteln, Messen & Erklären, Kassel, 2006
- Maaß, K.: Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I., Cornelsen Verlag, Berlin, 2007
- Riebel, Julia: Modellierungskompetenz beim mathematischen Problemlösen, 2010
- Tóth B.: Modelllezési feladatok a matematikában szakdolgozat, témavezető: Dr. Ambrus Gabriella, ELTE 2010
- Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für Mittleren Schulabschluss - Beschluss vom 4.12.2003, Wolters Kluwer, München, 2004
- Nemzeti Alaptanterv – Melléklet a 110/2012. (VI.4.) Korm.rendeletéhez, In: Magyar Közlöny 2012/66.